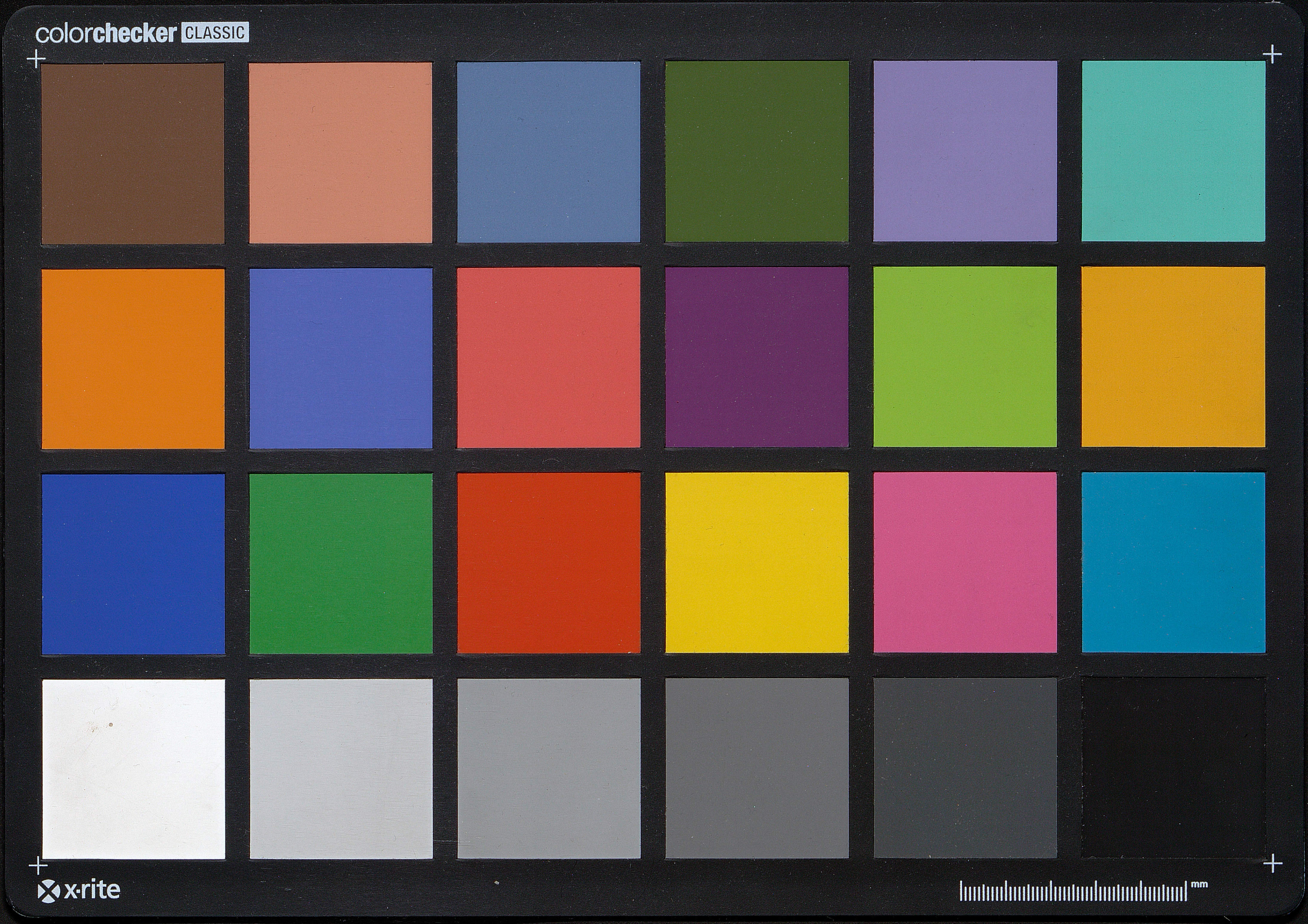

colorchecker CLASSIC
x-rite
mm

PROBLÈMES

DIVERS

E. M.

Ms 209

MS 209

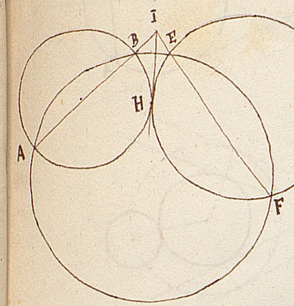
Mélanges.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Ms 209

Problèmes divers.
Exercices.

V. E. Mauduit.



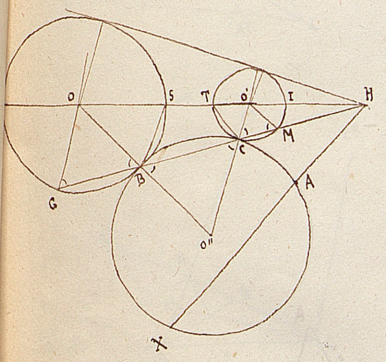
1. — Décrire un cercle tangent à un cercle et passant par deux points A et B.

On suppose le problème résolu. On mène la tg. commune IH. — On a IA.IB = IE.IF. Les quatre points ABEF sont donc sur une même circonférence. Donc : par A et B on mène une circonf. qcq. coupant la première en F et E. On détermine ainsi le point I : puis le point H.

2. Décrire un cercle tangent à deux cercles et passant par un point donné.

On se rappelle ce que c'est que le centre de similitude de deux cercles : c'est le point de rencontre de la ligne des centres par la ligne qui joint les extrémités de deux rayons parallèles quelconques.

Alors : soient O, O' les deux cercles donnés, H leur centre de similitude ; A le point donné, O" le cercle cherché. BC passe évidemment par le point H. Car OB et O'M sont visiblement parallèles. — Cela posé, je tire HA. J'aurai



$$HA \cdot HX = HC \cdot HB$$

HC et HB sont inconnus. Mais le produit HC.HB est égal à HT.HS. En effet le quadrilatère STCB est inscriptible (vu l'égalité des angles SBC et O'TC, laquelle se reconnaît en voyant quelle est leur mesure). Donc on aura HX. On est donc ramené au problème précédent.

3. Décrire un cercle tangent à trois autres.

Ce problème se ramène immédiatement au précédent.

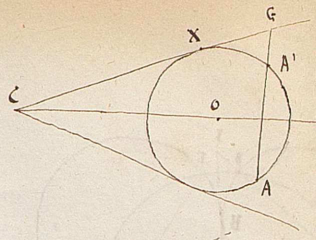
4. Décrire un cercle tangent à un cercle, à une droite, et passant par un point.

Solution connue.

5. Décrire un cercle passant par un point et tan-

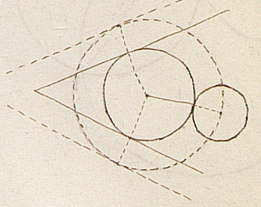
·gent à deux droites.

Se donner A, c'est se donner A'. — Le point x se déterminera soit par une parabole soit par une moyenne proportionnelle entre AG et A'G.



6. Cercle tangent à deux droites et à un cercle.

Voir la figure. — Le problème se ramène au précédent avec une grande facilité.



7 Cercle tangent à deux cercles et à une droite.

Il se ramène au problème 6.

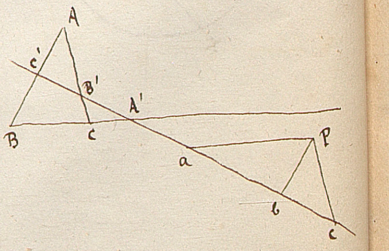
8. Construire trois cercles tangents deux à deux et ayant des centres donnés.

9. Mener une droite telle que les cordes intercep·tées par deux cercles donnés soient deux longueurs don·nées.

Théorie des transversales.

10. Quand une transversale coupe un triangle, le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.

Remarquer que la transversale coupe 0 ou 2 côtés, 3 ou 1 prolongements.



Par un point qcq. P je mène aux côtés du trian·gle des parallèles terminées à la transversale.

Les deux triangles Pac et B'A'C semblables donnent $\frac{CA'}{Pa} = \frac{CB'}{Pc}$

" Pbc et AC'B' " $\frac{AB'}{Pc} = \frac{AC'}{Pb}$

" BC'A' et Pab " $\frac{BC'}{Pb} = \frac{BA'}{Pa}$

Multipliant ces trois égalités, j'ai

$$AB' . CA' . BC' = CB' . AC' . BA'.$$

(96 B.

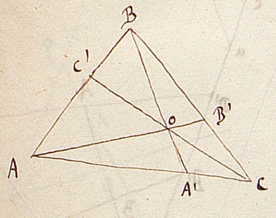
11. Réciproquement, si trois points, pris en nombre pair sur les côtés d'un triangle, satisfont à ces conditions, ces trois points sont en ligne droite.

Démonstration par l'absurde.

12. Corollaire. Les centres de similitude de trois cercles sont en ligne droite.

On considère le triangle dont les 3 centres sont les sommets : et l'on voit que la relation ci-dessus est satisfaite. Donc etc.

13. Si trois droites partant des trois sommets d'un triangle, concourent en un même point, elles déterminent sur les côtés opposés des segments tels que le produit de trois non consécutifs est égal au produit des trois autres.

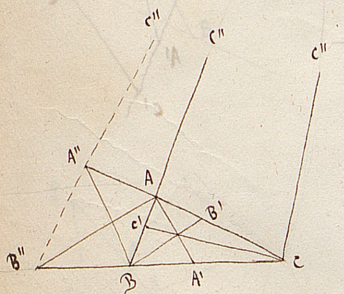


C'est ce que l'on voit au moyen des deux triangles BAA' et CAA' et de la transversale CC'.

La réciproque se démontre par l'absurde.

Corollaires. — Les trois médianes d'un triangle concourent en un même point. — De même les trois hauteurs. — De même les trois bissectrices.

Corollaire de 11. — Si l'on mène les bissectrices et les perpendiculaires aux bissectrices, les points B'', A'', C'' où ces perp. rencontrent les côtés opposés sont en ligne droite.



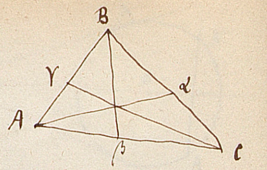
Effectivement on a, d'après les propriétés des bissectrices :

$$B''B : B''C :: c : b$$
$$C''A : C''B :: b : a$$
$$A''C : A''A :: a : c$$
$$\overline{}$$
$$B''B \cdot C''A \cdot A''C = B''C \cdot C''B \cdot A''A$$

Donc etc.

14. On donne les centres A, B, C de trois cercles dont les rayons sont a, b, c. On prend les centres de similitude internes, et si l'on joint chacun d'eux

au centre du troisième cercle, on a trois droites qui se coupent en un même point.



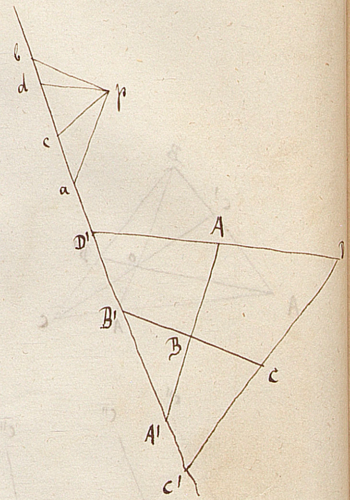
Car on a

$$B\alpha : C\alpha :: b : c$$
$$A\gamma : B\gamma :: a : b$$
$$C\beta : A\beta :: c : a$$

D'où .. donc etc.

Et de même pour les centres de similitude externes, on a la propriété 12.

15. Une droite qui rencontre un polygone de m côtés détermine sur ces côtés des segments tels que le produit de m non consécutifs est égal au produit des m autres.



Pour le démontrer, par le point p qcq. sur le plan du polygone, je mène des parallèles aux côtés.

pba	semblable à	BB'A'	donne	BB' : BA' :: pb : pa
paD	"	AA'D'	"	AA' : AD' :: pa : pD
pcD	"	DD'C'	"	DD' : DC' :: pD : pc
pcb	"	CC'B'	"	CC' : CB' :: pc : pb

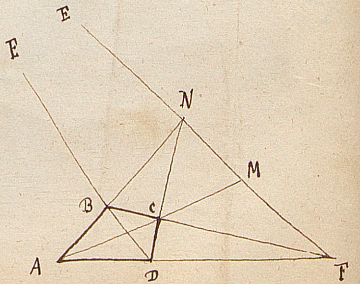
D'où .. donc etc.

La même propriété a lieu pour un polygone gauche dont on coupe les côtés par un plan transversal.

En effet, projetons le polygone sur un plan perpendiculaire au plan donné. Le théorème est vrai pour cette projection et la trace du plan donné. Chaque côté est égal à sa projection multipliée par le cosinus de l'angle qu'il fait avec elle. Mais comme les deux segments d'un même côté sont dans les deux membres, le cosinus s'en va comme facteur commun.

16. Propriétés du faisceau harmonique.

17. Dans un quadrilatère complet, chaque diagonale est partagée harmoniquement par les deux autres.



En effet dans le triangle ANF j'ai, à cause de

la transversale BD :

$$AD . FE . NB = DF . NE . BA$$

Dans ce même triangle, les 3 droites concourantes AC, NC, FC donnent

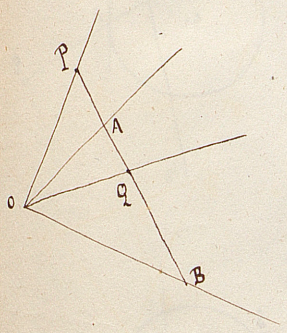
$$AD . FM . NB = DF . NM . BA$$

Donc

$$\frac{FE}{FM} = \frac{NE}{NM}$$

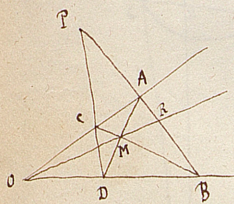
$$FE . NM = MF . NE$$ c.q.f.d.

Pôles et Polaires.



18. Deux droites OA et OB étant données, et un point P de leur plan : par ce point je mène une sécante que je divise harmoniquement au point Q. Le lieu de ces points Q est ce que j'appelle la polaire du point P par rapport aux deux droites.

Tirons OQ et OP. Les quatre points A, B, P, Q sont harmoniques. Donc les 4 droites qui y passent forment un faisceau harmonique : et toutes les sécantes issues de P sont divisées harmoniquement par OQ. OQ est donc la polaire.



19. Deux droites, OA et OB nous sont données. Par un point P on mène deux sécantes à volonté. On joint en croix les points d'intersection, AD et BC. Le lieu des points M est la polaire du point P.

Car : si je prends le quadrilatère complet correspondant au quadrilatère OCMD, je vois que les 4 points P, A, R, B sont harmoniques (17). Donc OR est la polaire de P. Donc etc.

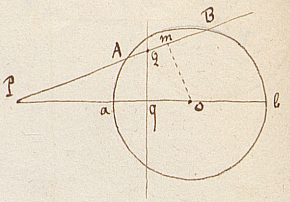
Corollaire. – Moyen d'avoir le quatrième harmonique de trois points, avec la règle seulement.

20. – Le lieu des points M est toujours le même, quelque part que soit le point P sur la droite OP.

Evident.

Poles et polaires dans le cercle.

21. Un point P étant donné dans le plan d'un cercle, je mène une sécante PAB. Je la divise harmoniquement en Q. Le lieu des points Q est ce que j'appelle la Polaire du point P par rapport au cercle.



Je dis que ce lieu est la perpendiculaire Qq à la ligne Po. — Pour cela, je cherche Pq. Soit om perp. sur AB. Les deux triangles PQq, APom donnent

$$Pq : PQ :: Pm : Po$$

$$:: \frac{PB+PA}{2} : Po$$

d'où

$$Pq = \frac{1}{2.Po}\left(PA.PQ + PB.PQ\right)$$

or on a par hypothèse

$$PA.QB = PB.AQ$$

ou

$$PA\,(PB - PQ) = PB\,(PQ - AP)$$

d'où

$$PA.PQ + PB.PQ = 2PA.PB.$$

$$= 2\,Pa.Pb$$

$$= 2\,(Po - R)(Po + R)$$

$$= 2\,(\overline{Po}^2 - R^2)$$

Donc

$$Pq = \frac{\overline{Po}^2 - R^2}{Po} = \text{Const.}$$

C.Q.F.D.

On peut trouver pour Oq une valeur simple. Car

$$Po^2 - Po.Pq = R^2$$

$$Po\,(Po - Pq) = R^2$$

$$OP.Oq = R^2$$

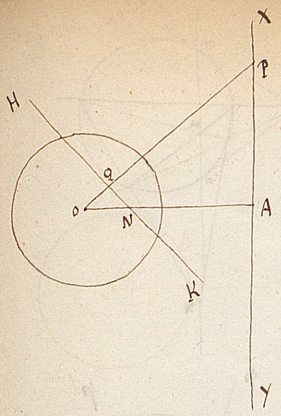
$$Oq = \frac{R^2}{OP}$$

valeur souvent employée.

Elle montre que la polaire n'est autre chose que la corde de contact pour le point P.

22. Positions respectives du pole et de la Polaire.

23. Quand un point P se meut sur une droite xy,



la polaire de ce point passe toujours par le pole de cette droite.

Soit HK la polaire de P. J'aurai

$$OQ \cdot OP = R^2$$

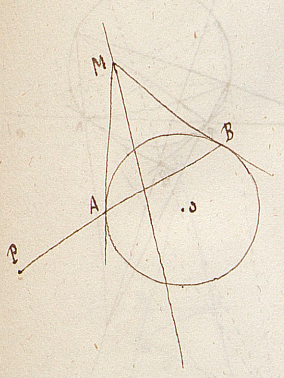
Soit OA perp. sur XY, et N la rencontre de HK et de OA. Les deux triangles semblables OQN et OAP donnent

$$ON : OP :: OQ : OA$$

$$ON \cdot OA = OQ \cdot OP$$

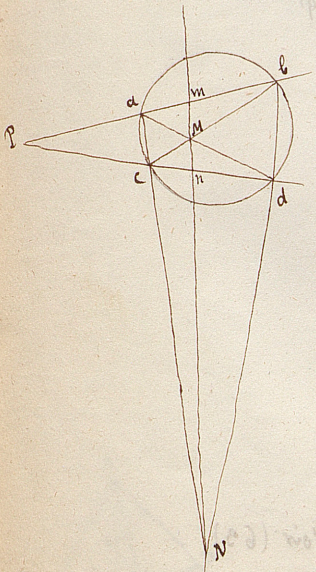
$$ON \cdot OA = R^2$$

Donc N est le pole de XY. Donc etc.



24. Soit P un point, et O un cercle. Par le point O je mène une infinité de sécantes. PAB en est une : AM et BM les deux tangentes. Le lieu des points M est la polaire du point P.

Car PAB est la polaire de M. Si cette polaire passe toujours par P, son pôle M décrit la polaire de P, cqfd.



25. Par un point P, on mène deux sécantes quelconques à un cercle. On joint en croix les points d'intersection. Le lieu des points M est la polaire du point P. De même aussi le lieu des points N.

En effet, dans le quadrilatère complet qui répond au quadrilatère NcMd, les quatre points P, a, m, b sont harmoniques, de même que P, c, n, d. Donc la droite mn est bien la polaire de P., cqfd.

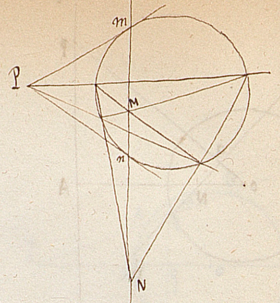
Le théorème (24) n'est qu'un cas particulier de celui-ci.

26. Ce théorème (25) permet de mener, avec la règle seule, une tangente à un cercle, soit par un point extérieur, soit par un point pris sur le cercle lui-même.

D'abord pour un point extérieur.

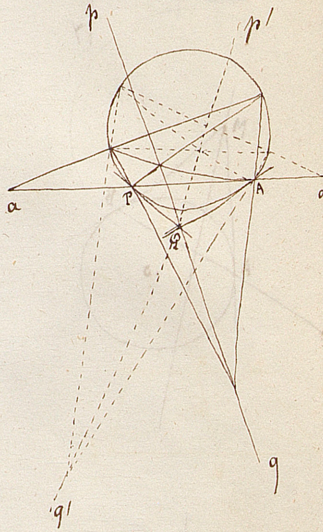
Soit P le point par lequel on veut mener une

Tangente. Il est clair que je puis construire sa polaire MN avec le seul secours de la Règle. Et il ne me restera plus qu'à joindre Pm et Pn.



Maintenant, pour un point pris sur le cercle.

Soit P ce point. Je mène une sécante quelconque PA. Il s'agit de trouver le pôle de PA. Soit a un point de PA. Je détermine sa polaire pq. Sur cette polaire est le pôle de PA. – Il est aussi sur p'q'. Donc il est en Q. QP et QA sont les deux tangentes au cercle. (Hachette).



Problèmes Divers.

---

27. Le nombre des diagonales d'un polygone de m côtés est $\frac{m(m-1)}{1.2} - m$ ou $\frac{m(m-3)}{2}$.

Le nombre des intersections de ces diagonales entre elles est $\frac{n(n-1)}{2}$, si $\frac{m(m-3)}{2} = n$.

Le nombre des intersections intérieures au polygone supposé convexe est $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$.

28. Dans un triangle isocèle, la somme des perpendiculaires abaissées d'un point quelconque de la base .... etc.

Dans un triangle équilatéral ... etc.

29. Trouver le plus court chemin d'un point à un autre en touchant une droite.

Problème du billard.

30. Dans tout quadrilatère inscriptible, les bissectrices des angles de deux côtés opposés se coupent à angle droit. Voir (63).

31. Dans un quadrilatère quelconque, les quatre droites

qui joignent deux à deux les milieux de deux côtés adjacents, forment un parallélogramme.

32. Dans tout quadrilatère, les bissectrices des quatre angles forment par leurs intersections un quadrilatère inscriptible.

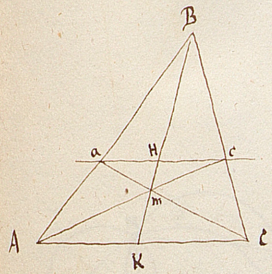
33. Dans un triangle, les 3 bissectrices se coupent en un même point.

34. Il en est de même des perpendiculaires élevées sur les milieux des trois côtés.

35. Il en est de même des trois hauteurs.

36. Il en est de même des trois médianes.

Ce dernier résultat est un cas particulier de ce théorème général :



37. Si, dans un triangle ABC, on mène une parallèle qcq. ac à la base AC, et si l'on joint en croix aC et Ac, le lieu des points m est la médiane aboutissant au point B.

En effet, je joins Bm. J'aurai

$$\left.\begin{array}{l} aH : KC :: Hm : mK \\ Hc : AK :: Hm : mK \end{array}\right\} \text{ d'où } aH : KC :: Hc : AK$$

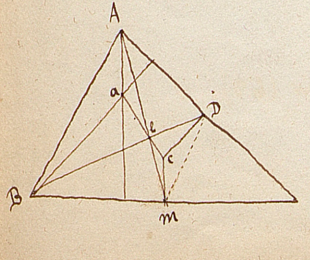
et

$$\left.\begin{array}{l} aH : AK :: BH : BK \\ Hc : KC :: BH : BK \end{array}\right\} \text{ d'où } aH : AK :: Hc : KC$$

Ces 2 proportions donnent

$$aH = Hc \qquad AK = KC$$

Donc etc.



38. Soient a, b, c les points de concours des hauteurs et des médianes et le centre du cercle circonscrit. Ces 3 points sont en ligne droite, et l'on a

$$ab = 2bc.$$

Les triangles ABa et cmD sont semblables et donnent

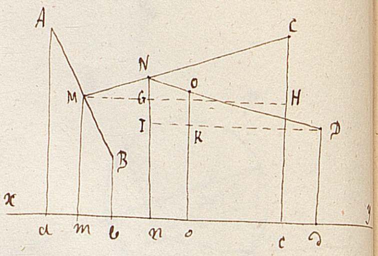
$$Aa : cm :: AB : mD :: 2 : 1$$

Mais déjà Ab : bm :: 2 : 1 et les angles compris sont

égaux. Donc les triangles Aab et mcb sont semblables ce qui démontre le principe.

39. Centre des moyennes distances.

On donne un nombre quelconque de points. On en joint deux, A et B, par une droite, et l'on en prend le milieu M. On joint MC, et l'on prend $MN = \frac{MC}{3}$. On joint ND, et l'on prend $NO = \frac{NC}{4}$, et ainsi de suite. Le point O ainsi obtenu est ce qu'on appelle le centre des moyennes distances.



Soit xy une ligne quelconque du plan des quatre points. La perpendiculaire abaissée du centre O sur xy est moyenne entre toutes les autres perp. abaissées des quatre points donnés.

En effet : d'abord

$$Mm = \frac{Aa + Bb}{2}$$

Puis

$$Nn = NG + Mm$$

or

$$NG : CH :: 1 : 3$$

d'où

$$NG = \frac{1}{3} CH = \frac{1}{3} Cc - \frac{1}{3} Mm$$

Donc, en remplaçant

$$Nn = \frac{1}{3} Cc + \frac{2}{3} Mm = \frac{Aa + Bb + Cc}{3}$$

De même

$$Oo = OK + Dd$$

or

$$OK : NI :: 3 : 4$$

d'où

$$OK = \frac{3}{4} NI = \frac{3}{4} Nn - \frac{3}{4} Dd$$

Donc, en remplaçant,

$$Oo = \frac{3}{4} Nn + \frac{1}{4} Dd = \frac{Aa + Bb + Cc + Dd}{4}$$

et ainsi de suite, cqfd.

Si xy laisse quelques points d'un côté, les autres de l'autre, certaines perpendiculaires devront se compter comme négatives. — On le voit en prenant une droite parallèle à celle-ci, et laissant tous les points d'un

même côté. Il suffit d'appliquer le théorème à cette nouvelle droite: et la distance des deux parallèles s'en va dans les deux membres.

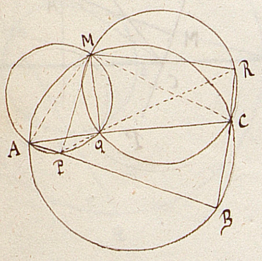
Cette propriété du point o ayant lieu pour un axe quelconque, ce point est unique, quel que soit le point de départ de la construction.

D'après cela, on voit que l'on pourra souvent prévoir sa position par raisons de symétrie.

ainsi, dans les polygones réguliers, le centre des moyennes distances est au centre du polygone.

Dans un triangle, ce centre est le point de concours des médianes: la construction le montre immédiatement.

40. Si d'un point quelconque de la circonférence circonscrite à un triangle on abaisse des perpendiculaires sur les trois côtés, les pieds de ces perpendiculaires sont en ligne droite.



Il suffit de démontrer que l'angle AQP = RQC.

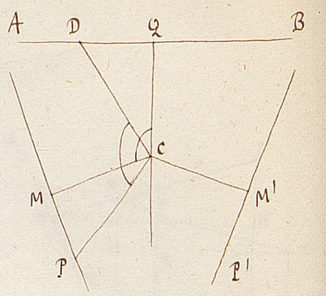
Pour cela je tire MA et MC, et sur ces deux lignes comme diamètres je décris des circonférences qui passent l'une en P et Q, l'autre en Q et R. — Maintenant je dis que AQP = RQC: je vais prouver que AMP = RMC. Car ces angles sont les compléments de MAB et RCM, lesquels ont pour mesure, dans le cercle circonscrit, le 2ème $\frac{BC+CM}{2}$, le 1er $\frac{BCM}{2}$, et sont par suite égaux. Donc...

C.Q.F.D.

Réciproquement, on demande le lieu des points M tels que les 3 points P, Q, R soient en ligne droite.

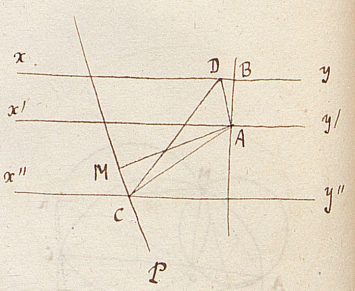
On reprendra les raisonnements en sens inverse, et l'on verra que le quadrilatère MABC est inscriptible.

41. On donne une droite AB et un point C. On mène CD qcq. et l'on fait avec CD un angle donné. On prend CP : CD :: a : b. Lieu des points P.



Abaissons CQ perp. sur AB, et faisons l'angle QCM égal à l'angle donné : puis prenons CM tel que CM : CQ :: a : b. Les deux triangles CDQ et CMP sont semblables. Donc MP est perp. sur CM, et d'ailleurs tous les points P seront sur cette ligne en vertu de la similitude des triangles. Donc PM est le lieu. — Il y aura aussi la droite symétrique M'P'.

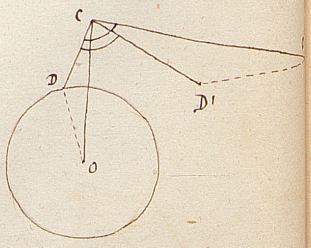
Application. — On donne trois parallèles, et l'on propose de leur inscrire un triangle semblable à un triangle donné.



Plaçons en A l'un des sommets, et menons par ce point une perp. aux trois lignes. Menons AM faisant un angle égal à l'un des angles du triangle, et telle que AM : AD :: a : b, a et b étant les côtés qui comprennent l'angle. MP est le lieu des points tels que si on les joint à A et qu'on fasse en A l'angle donné, on ait MA : AB :: a : b. Tirons CA et AD : ACD est le triangle demandé.

Combien y a-t-il de solutions à ce problème ?

42. Même problème, la droite AB étant remplacée par un cercle O.



Soit D' un point du lieu. J'aurai

$$CD' : CD :: a : b.$$

Je mène CO. Je mène aussi CO' faisant avec CO l'angle donné, et je prends O' tel que

$$CO' : CO :: a : b$$

Les deux triangles CDO, CD'O' sont alors semblables

et donnent

$$O'D' : OD :: a : b$$

Le lieu cherché est un cercle dont O' est le centre et $\frac{a.OD}{b}$ le rayon. — Il y en a un second.

application. — Inscrire dans trois cercles concentriques un triangle semblable à un triangle donné.

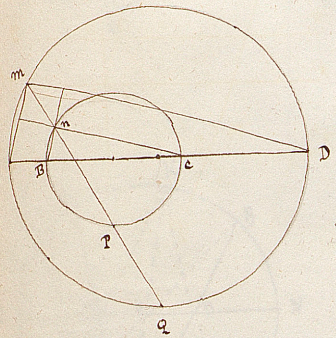
Construction facile, et analogue à celle du numéro précédent.

43. Chercher les deux mêmes problèmes, en prenant $CD . CM = m^2$ au lieu de $CD : CM :: a : b$.

Pour, une droite, deux cercles.

Pour un cercle .. ? id.

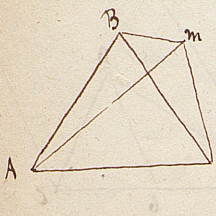
44. On donne deux lignes, AB et CD, dans le prolongement l'une de l'autre. On demande de mener par les extrémités de chacune deux systèmes de parallèles dont l'intersection soit un carré.



Sur AD et sur BC on décrit deux demi-circonférences. — mn passe évidemment par les milieux P et Q des arcs BPC et AQD. D'où la construction.

45. Deux cercles sont tangents. Par le point de contact, on leur mène deux cordes communes dont on joint les deux extrémités dans chaque cercle. Les deux lignes de jonction sont parallèles.

46. Lieu des points tels que, si on les joint aux trois sommets d'un triangle équilatéral, une des 3 distances soit égale à la somme des deux autres.



m un point du lieu. On aura

$$mA = mB + mC$$

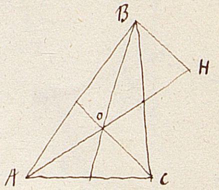
ou

$$mA . BC = mB . AC + mC . AB$$

puisque $AB = BC = AC$. Donc, dans le quadrilatère

m B A C le Rectangle des diagonales est égale à la somme des Rectangles des côtés opposés. Donc il est inscriptible. Le lieu des points m est donc le cercle circonscrit au triangle.

47. Construire un triangle connaissant les 3 médianes.



Soit BH parallèle à OC. J'aurai OH = AO, et BH = OC. Le triangle OBH est donc construit sur les $\frac{2}{3}$ de chaque médiane pour côtés. De là la construction.

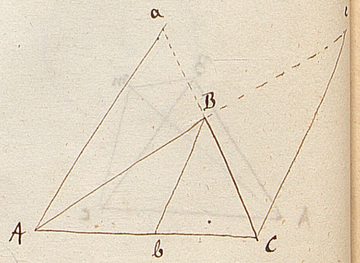
48. Théorème de Varignon sur les parallélogrammes construits sur les côtés d'un triangle quelconque.

On en déduit :

Si, sur les deux côtés et la diagonale d'un parallélogramme comme bases, on construit 3 triangles ayant un même sommet quelconque, le triangle construit sur la diagonale est égal à la somme ou à la différence des deux autres.

Il suffit, pour le voir, de construire 3 parallélogrammes doubles des triangles, et ayant pour bases deux côtés et la diagonale du parallélogramme donné.

49. Si, par les trois sommets d'un triangle quelconque, on mène 3 parallèles quelconques, et qu'on les termine au côté opposé, on détermine ainsi 3 segments avec lesquels on peut construire 3 rectangles. Démontrer que l'un de ces rectangles est égal à la somme des deux autres.



J'aurai

$$Aa : Bb :: AC : bC \quad (1)$$

et aussi :

$$Cc : Bb :: AC : Ab$$

$$Cc - Bb : Cc :: bC : AC \quad (2)$$

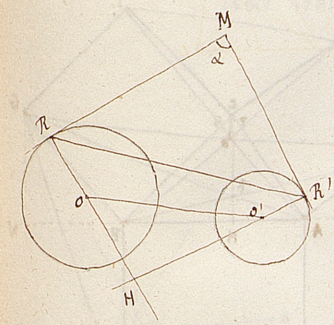
(1) et (2) donnent

$$Aa : Bb :: Cc : Cc - Bb$$

d'où

$$Aa . Cc - Aa . Bb = Bb . Cc .$$

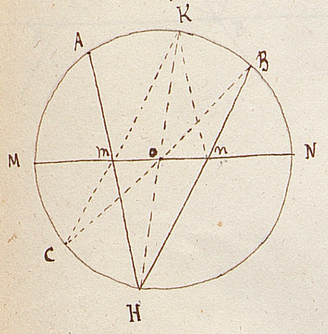
C q f d.



50. Mener à deux cercles deux tangentes égales et faisant un angle donné α.

Problème résolu. On joint RR'. MR = MR'. Donc HR = HR'. Donc HO' − HO = OR − O'R'. L'angle en H = 180 − α. Donc on peut construire le triangle OHO' puisqu'on connaît l'angle au sommet, la base, et la différence des deux autres côtés.

Discuter : cas des tangentes intérieures.

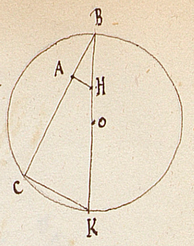


51. On donne un cercle, deux points A et B sur ce cercle, et un diamètre MN. Trouver sur le cercle un point H tel que, en tirant AH et BH, on ait om = on.

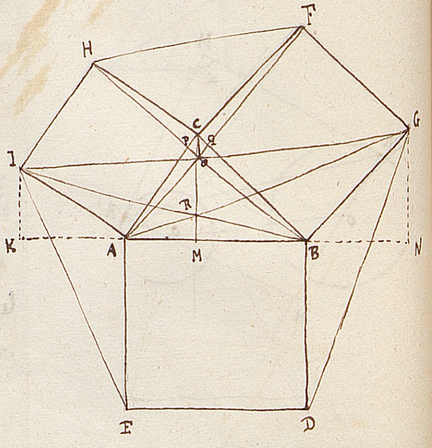
On suppose le problème résolu. Je tire Ho : puis mK, nK. KmHn est un parallélogramme, car les diagonales se coupent en parties égales. Donc KC est parallèle à BH, et ces deux droites sont à égale distance de O. Donc BO passe en C. Ce point C est donc connu. — De plus, l'angle AmC est supplémentaire de AHB. Donc on peut trouver le point m.

51. Mener par un point dans un cercle une sécante dont les deux parties AB et AC soient entre elles comme m est à n.

Soit BC cette corde. Je tire Bo. Je joins CK et je mène AH parallèle à CK, donc perp. à BC. J'aurai BH : HK :: m : n. — Je puis donc connaître la longueur BH. Le problème est donc ramené à faire passer par A un cercle de rayon $\frac{BH}{2}$ tangent au cercle donné. Or c'est ce que l'on sait faire.



52. On a un triangle quelconque, ABC. Sur les 3 côtés on construit 3 carrés. alors :



1°. IB et AG se coupent sur la hauteur CM. En effet, remarquons que le triangle IKA = ACM evidemt. et GNB = BCM. Donc IK = AM et GN = BM et KA = BN.
Cela posé, soit R le point de rencontre de IB avec la hauteur CM. J'ai

MR : IK :: BM : BK

ou, en remplaçant,

MR : AM :: GN : AN

Donc, si l'on joint AR et RG, on forme deux triangles semblables. Donc etc.

2°. BH et AF se coupent à angle droit en O. En effet : les triangles HCB et FCA sont égaux. Donc angle CAO = OHC. De plus les deux angles en P sont égaux. Donc les triangles HPC et APO sont semblables. Donc etc.

3°. Le point O est sur GI. Car la circonférence passant par IHCA passera aussi par O. — et la droite IO bisecte l'angle HOA, puisque les deux parties de cet angle ont pour mesure chacune $\frac{1}{8}$ de circonférence. — De même GO bisecte FOB. Donc..

4°. CO est perpendiculaire sur IG. — Car IC est un diamètre du cercle qui passe en I, C et O.

5°. Les triangles HCF, IAE, GBD sont Equivalents au triangle ABC. –

ainsi IAE et ABC ont même base AB et même hauteur $AK = CM$.

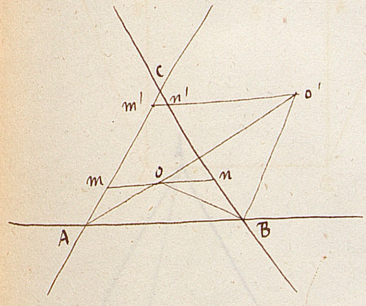
6°. Les 3 droites telles que CO se coupent en un même point.

Voir 1544. (chercher la démonstration).

7°. Les segments Cp et Cq sont entre eux comme CA et CB.

Démonstration facile par les transversales.

53. On donne 3 droites qui se coupent, AB, AC, BC. Mener mn parallèle à AB de façon que $Am \pm Bn = mn$.



1°. AO et BO bissectrices des angles en A et B du triangle CAB. Evidemment $Am + Bn = mn$.

2°. AO' et BO' bissectrice de l'angle extérieur en B. – $Am' = m'o'$ et $Bn' = Bo'$. Donc ..

54. Dans un triangle quelconque, un angle est droit, aigu ou obtus suivant que la ligne qui joint son sommet au milieu du côté opposé est égale, supérieure ou inférieure à la moitié de ce côté.

Evident par la considération des angles.

55. Dans un trapèze, la droite qui joint les milieux des deux diagonales est parallèle aux deux bases et égale à leur demi-différence.

56. Construire un quadrilatère connaissant les quatre côtés et une médiane.

57. Soient a, b, c les 3 côtés d'un triangle, α, β, γ les 3 hauteurs. — On prend α, β, γ pour côtés d'un triangle, dont α', β' et γ' sont les hauteurs. Le nouveau triangle dont α', β', γ' seraient les côtés est semblable au premier.

En effet, on aura

$$a\alpha = b\beta = c\gamma$$

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' = \gamma\gamma'$$

d'où

$$\frac{a}{\alpha'} = \frac{b}{\beta'} = \frac{c}{\gamma'} \qquad \text{c q f d.}$$

De là le moyen de construire un triangle dont on connaît les 3 hauteurs.

Ce dernier problème peut se résoudre autrement. Car on a

$$a\alpha = b\beta = c\gamma$$

d'où, en divisant par $\alpha\beta\gamma$

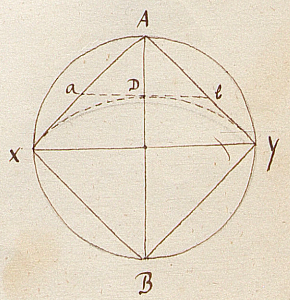
$$\frac{a}{\beta\gamma} = \frac{b}{\alpha\gamma} = \frac{c}{\alpha\beta}$$

d'où

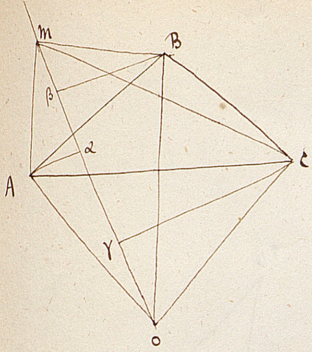
$$\frac{a}{\beta} = \frac{b}{\alpha} = \frac{c\gamma}{\alpha\beta}$$

Donc le triangle cherché est semblable à un autre dont les côtés seraient β, α et $\frac{\alpha\beta}{\gamma}$.

58. Construire un carré connaissant la différence entre la diagonale et le côté.



On mène les côtés AX, AY d'un angle droit, la bissectrice AB. On connaît la différence AD. Donc on construira l'arc de cercle XDY tangent à AX et AY. En lui menant une tangente en D, on déterminera a et b. La construction s'achève facilement.



59. Lieu des points tels que la somme des carrés de leurs distances aux trois sommets d'un triangle soit constante.

Soit m un point du lieu. o un point quelconque du plan. Je joins mo, Ao, Bo, co. J'aurai

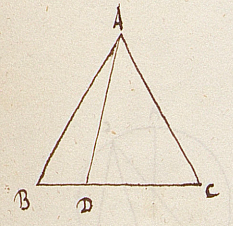
$$\overline{mA}^2 = \overline{om}^2 + \overline{oA}^2 - 2.om.o\alpha$$

$$\overline{mB}^2 = \overline{om}^2 + \overline{oB}^2 - 2.om.o\beta$$

$$\overline{mC}^2 = \overline{om}^2 + \overline{oC}^2 - 2.om.o\gamma$$

ajoutant, on voit que, pour que le second membre soit constant, il faut que le point o soit le centre de gravité.

S'il y avait plus de 3 points A, B, C.. on prendrait le centre des moyennes distances.



60. Dans un triangle isocèle, si l'on joint le sommet A à un point quelconque de la base, on a

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + BD.DC.$$

61. Dans un triangle quelconque, le carré de la bissectrice est égal au rectangle des côtés qui la comprennent, moins le rectangle des deux segments de la base.

62. Constructions de triangles.

I. Construire un triangle, connaissant:

1°. Les pieds des 3 médianes.

Le triangle qui a ces 3 points pour sommets a ses côtés parallèles à ceux du triangle cherché.

2°. Les pieds des trois hauteurs.

On démontre que les hauteurs sont les bissectrices des angles pour du triangle formé en joignant les 3 points donnés.

3°. La hauteur, la bissectrice et la médiane qui aboutissent à un même sommet.

Construction connue.

4°. Les 3 médianes. (voir 47).

5°. Les 3 hauteurs. (voir 57)

6°. Les 3 bissectrices.

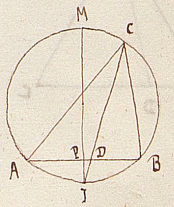
(Problème insoluble par la règle et le compas.

II. Construire un triangle, connaissant la base, l'angle opposé, et

1°. La médiane correspondante.

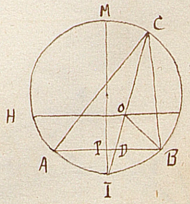
2°. La hauteur correspondante.

3°. La bissectrice.



Le problème est ramené à faire passer par le point I une corde IDC telle que la longueur interceptée DC soit connue. – voir 69.

4°. Le rayon du cercle inscrit.



Connaissant le rayon r et l'angle ACB je connais OC. Je puis mener HO. Je suis ramené à conduire par le point I une droite IC telle que OC soit donné. voir encore 69.

III. Construire un triangle connaissant deux de ses côtés et

1°. La médiane aboutissant au milieu de l'un d'eux.

2°. La hauteur.

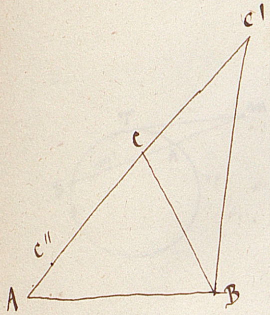
3°. La Bissectrice.

Insoluble par la Règle et le compas.

Il ne l'est plus si c'est la Bissectrice de l'angle des deux côtés.

IV. Construire un Triangle :

1°. Connaissant un côté, l'angle opposé ; et la Somme ou la Différence des deux autres côtés.



Je prolonge AC d'une quantité $cc' = CB$. J'ai $Ac' =$ la Somme donnée, et l'angle $\alpha' = \frac{\alpha}{2}$. Je puis donc trouver le point c' et achever le Triangle.

Pour la Différence, on prendrait $cc'' = CB$ dans la direction cA

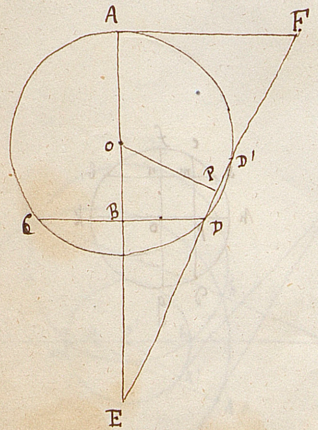
2°. Connaissant la Base, la hauteur, et sachant que l'on a

$$xy = bh$$

x et y étant les deux autres côtés.

Cette Relation montre que le Triangle est Rectangle. Dès lors plus de difficulté.

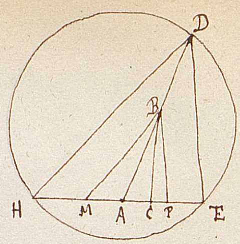
3°. Connaissant la Somme a de la Base et de la hauteur, le cercle circonscrit, et sachant que le Triangle est isocèle.



Prenons $AE = a$, et soit CD la Base du Triangle. On aura $CD = BE$, ou $BE = 2BD$. Menons en A une Tangente, et tirons ED qui la coupe en F. On a $AF : AE :: 1 : 2$. D'où la construction.

Pour la possibilité du problème, il faut que $OP < R$.

4°. Connaissant une médiane, la hauteur qui aboutit au même sommet, et l'angle à ce sommet du Triangle.



Construisons le triangle formé par la médiane et la hauteur, ABC. Sur AC et de part et d'autre de A prenons des longueurs égales. Décrivons sur HE un segment capable de l'angle donné. Prolongeons AB jusqu'à la rencontre D. Joignons DH, DE. Par B menons BM, BP parallèles à DH et DE : le triangle cherché est BMP.

5°. Connaissant la surface et les trois angles. Facile, les surfaces de deux triangles semblables étant entre elles comme les carrés des côtés homologues.

6°. Connaissant le périmètre et les angles.

7°. Connaissant le rayon du cercle circonscrit, la base, et le produit des 3 côtés.

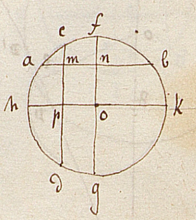
On a $R = \dfrac{abc}{4S}$ et $S = \dfrac{bh}{2}$ d'où $h = \dfrac{ac}{2R}$.

8°. Connaissant la hauteur, la bissectrice et la base opposée.

Cela se réduit à ~~trouver~~ construire une équation du second degré assez simple.

63. Dans un quadrilatère inscriptible, la bissectrice de l'angle des deux diagonales est parallèle à celle de l'angle de deux côtés opposés. Voir (30).

64. Si, dans un cercle, on mène deux cordes rectangulaires, la somme des carrés des 4 segments est constante.



Menons par le centre deux diamètres parallèles.

$$\overline{am}^2 + \overline{mb}^2 = (an - mn)^2 + (an + mn)^2 = 2\,\overline{an}^2 + 2\,\overline{mn}^2$$

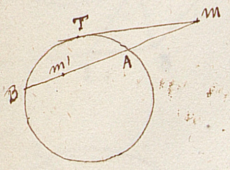
De même $$\overline{cm}^2 + \overline{md}^2 = 2\,\overline{cp}^2 + 2\,\overline{mp}^2$$

Donc $$\overline{ma}^2 + \overline{mb}^2 + \overline{mc}^2 + \overline{md}^2 = 4R^2.$$

65. Etant donné un nombre quelconque de cercles, on demande le Lieu des points tels que la somme des carrés des tangentes soit constante.

C'est un cercle dont le centre est au centre des moyennes distances de tous les centres.

66. Des axes Radicaux.

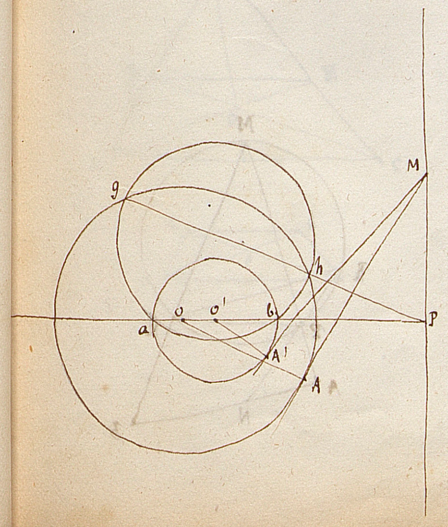


On appelle Puissance d'un point par rapport à une circonférence le produit constant mA.mB des segments formés par une corde quelconque passant par ce point. Si le point m est extérieur, cette puissance est égale au carré de la tangente. — Si le point est intérieur, la puissance est égale au carré de la moitié de la plus petite corde passant par ce point. La puissance du centre est le carré du Rayon, celle d'un point de la circonférence est nulle.

Théorème. Tous les points d'égale puissance pour deux cercles sont situés sur une même perpendiculaire à la ligne des centres.

Si les deux cercles sont tangents, la tangente commune est évidemment le lieu de ces points.

S'ils se coupent, c'est la corde de commune.



Supposons-les donc extérieurs ou intérieurs. Par les extrémités du diamètre ab menons un cercle quelconque qui coupe le cercle o. La corde gh coupe la ligne des centres en P. MP, perp. à oo', est le lieu cherché. — D'abord P est un point d'égale puissance, car Pa.Pb = Ph.Pg. — De plus je dis que MA = MA'. Car $\overline{MA}^2 + R^2 = \overline{MP}^2 + \overline{OP}^2$

$$\overline{MA'}^2 + R'^2 = \overline{MP}^2 + \overline{O'P}^2$$

ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

D'où, en retranchant

$$\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{MA'}^2 + R^2 - R'^2$$

Or $\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2$ et $R^2 - R'^2$ sont constants. Donc aussi $\overline{MA}^2 - \overline{MA'}^2$. Or, en P, $MA = MA'$. Donc cela a toujours lieu.

Corollaires.

1°. $\overline{MA}^2 - \overline{MA'}^2$ étant toujours nul, $\overline{OP}^2 - \overline{O'P}^2 = R^2 - R'^2$. L'axe radical divise la ligne des centres en segments tels que la différence de leurs carrés est égale à la différence des carrés des rayons.

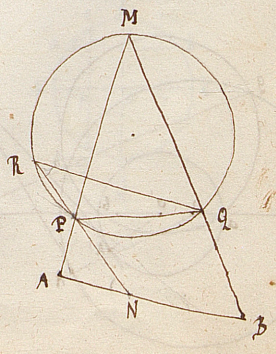
2°. Les tangentes communes, terminées aux points de contact, ont leur milieu sur l'axe radical.

3°. Les trois axes radicaux de trois circonférences prises deux à deux concourent en un même point, qu'on appelle point radical.

Donc quand trois circonférences se coupent deux à deux, les 3 cordes communes se coupent au centre radical. — Ce sont les 3 tang. comm. quand les 3 circ. se touchent deux à deux.

67. On donne un cercle et deux points A et B. Trouver un point M tel qu'en tirant MA et MB, la corde PQ soit parallèle à une droite donnée.

Supposons le problème résolu. Par le point Q je mène QR parallèle à AB. Je joins RP et je prolonge en N. J'ai deux triangles semblables ANP et AMB : car l'angle R égale l'angle M, et l'angle en A est commun. On a donc

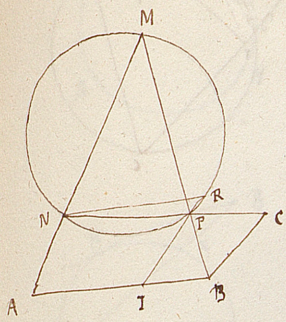


$$AP : AB :: AN : AM$$

D'où

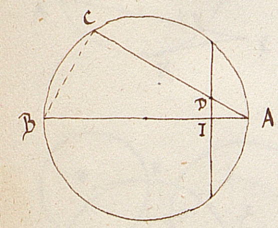
$$AN = \frac{AP . AM}{AB}$$

On connait donc AN. — on connait l'angle RQP, donc la corde RP. — D'où la construction.



68. — Inscrire un triangle dont les côtés passent par 3 points donnés.

Soit MNP ce triangle. — Par N, je mène NR parallèle à AB. Je joins RP. — Nous pouvons trouver le point I : $BI = \frac{BP.BM}{AB}$. — Reste à construire un triangle NRP tel que deux côtés passent en I et C, et le 3e soit parallèle à AB. — Voir 67.



69. On donne un cercle, un diamètre, et une corde perpendiculaire. Mener par l'extrémité A une corde telle que DC soit une longueur donnée.

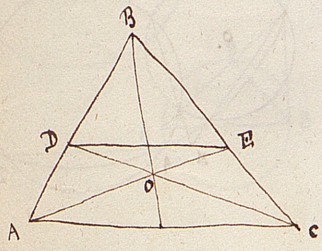
J'aurai

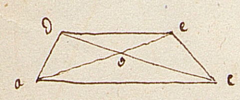
$$AC : AI :: AB : AD$$

d'où

$$AC.AD = AI.AB = k^2$$

Le problème est ramené à construire un rectangle dont on connait la surface et la différence des côtés.





70. Construire un trapèze, connaissant les angles et les diagonales.

Remarquons que dans un trapèze qcq. on a

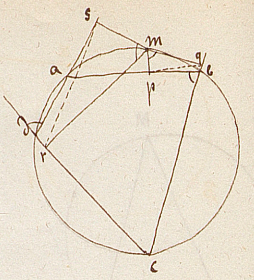
$$oe : oa :: od : oc$$

d'où

$$ae : cd :: ao : co$$

Cela posé, soit ABC un triangle semblable aux deux dont adec est la différence. Je détermine O par la condition que O est sur la médiane et que AO : CO :: ae : cd. Alors le trapèze ADEC est semblable au trapèze cherché. — D'où la solution.

71. — Si, d'un point qcq. d'une circonférence on abaisse des perpendiculaires sur les 4 côtés d'un quadrilatère inscrit, les deux produits de deux perp. sur les côtés opposés sont égaux.



on a $$mp \cdot mr = mq \cdot ms.$$

En effet, les deux triangles msr, mpq sont semblables. — Car d'abord les angles en m sont évidem^t. égaux. Puis, les quadrilatères $mpbq$ et $msdr$ étant inscriptibles, on a

$$\text{angle } mqp = mbp$$

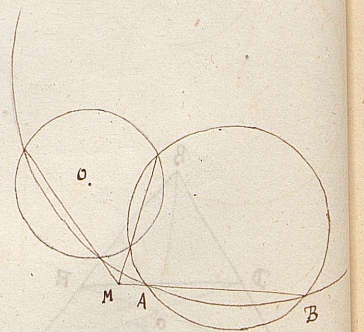
$$\text{angle } mrs = mds$$

lesquels ont même mesure, $\frac{\text{arc } am}{2}$. Donc les deux triangles sont bien semblables et l'on a

$$mp \cdot mr = mq \cdot ms$$ cqfd.

72. Faire passer par deux points un cercle qui intercepte sur une droite une longueur donnée.

Cela revient à construire un rectangle dont on connaît la surface et la différence des côtés.

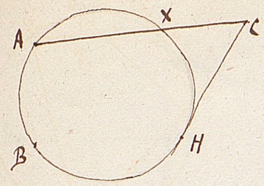


73. Faire passer par deux points un cercle qui en coupe un autre de façon que la corde commune ait une longueur donnée.

Tout se réduit évidemment à trouver le point M. — or il suffit pour cela de mener par A et B une circonfér. qcq. coupant O en 2 points qu'on joint, ce qui donne M.

74. Lieu des points tels que la somme des carrés des perpend. abaissées de ces points sur les côtés d'un polygone régulier soit constante.

C'est un cercle.

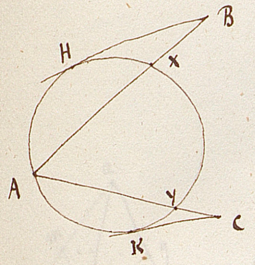


75. Construire un cercle passant par deux points A et B et tel que la tangente menée par un 3e, C, soit connue.

Joignons CA. on a

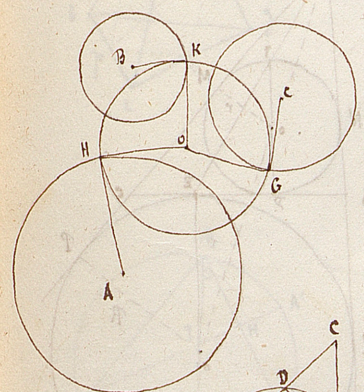
$$CA \cdot CX = \overline{CH}^2$$

D'où ~~H~~ le point X.



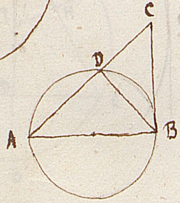
76. Faire passer un cercle par un point, A, et tel que les tangentes menées par B et C soient connues.

Même construction. X et Y s'obtiennent aisément.



77. Construire un cercle tel que les tangentes issues de 3 points A, B, C, soient connues.

Soit O ce cercle. – Il est clair qu'il coupe à angle droit 3 cercles faciles à construire. Donc OH, OK, OG sont les tangentes à ces cercles. O est donc leur centre radical. – De là la construction qui est facile.



78. On donne un cercle et une tangente. Mener par le point A une corde telle que DC soit donné.

79. Lieu d'un point d'une circonférence roulant dans une autre de rayon double.

Lieu d'un point lié à cette circonférence, mais non situé sur elle.

80. Diviser un triangle en moy. et extr. raison par une parallèle à la base.

On prend la hauteur pour inconnue.

81. Couper un prisme droit par un plan de façon que la section soit un triangle équilatéral.

82. Dans un tétraèdre quelconque, le plan bissecteur d'un angle dièdre divise l'arête opposée en deux parties qui sont entre elles comme les faces de l'angle dièdre.

83. Dans un triangle rectangle on a

$$b^2 + c^2 = a^2$$

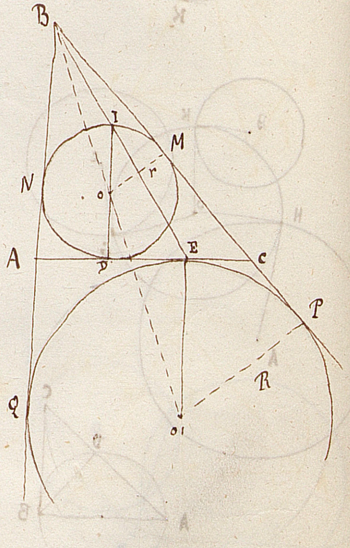
$$b^2 c^2 = a^2 h^2$$

d'où

$$\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

La réciproque est-elle vraie? (oui). facile.

84. Soit ABC un triangle, o et o' le cercle inscrit et un cercle ex-inscrit :



1°. $AD = CE$. En effet, c'est évident.

$$NQ = MP.$$

or on a

$$NQ = AD + AE$$
$$= 2AD + DE$$
$$MP = CE + CD$$
$$= 2CE + DE$$

Donc

$$2AD + DE = 2CE + DE$$
$$AD = CE \qquad \text{c.q.f.d.}$$

2°. $AC = NQ$. — Cela résulte de ce que

$$NQ = AD + AE$$
$$= AE + CE = AC.$$

3°. Soit DOI le diamètre perp. à AC. Les 3 points B, I, E sont en ligne droite.

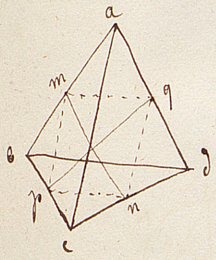
En effet, B, o, o' sont en ligne droite, et les deux triangles BOM, BO'P donnent

$BO : BO' :: r : R$

Donc, en joignant BI et BE, j'ai deux triangles semblables BOI, BO'E. Donc ...

85. Trois cercles se coupent en un point; ils se coupent en général en 3 autres points deux à deux. La somme des angles que font les tangentes à ces points d'intersection est égale à deux droits.

Évident à cause de la symétrie.

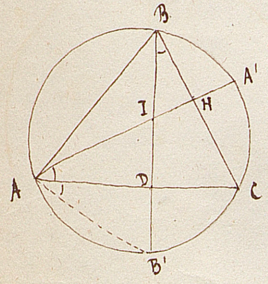


86. Si l'on joint les milieux des côtés opposés d'un tétraèdre, on a 3 droites concourantes: et le point de rencontre est au milieu de chacune d'elles.

Cela est évident, la figure mpnq par ex. étant un parallélogramme.

87. Construire un cercle équivalent à l'anneau compris entre deux cercles concentriques.

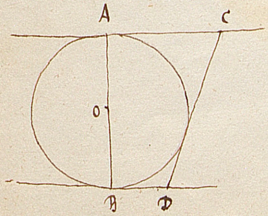
Ce cercle aurait pour diam. la tang. au petit terminée au grand.



88. On a un triangle ABC inscrit dans un cercle. — Soit I le point de rencontre des hauteurs. On a $ID = DB'$.

Car les deux triangles rectangles DAI et DAB' sont égaux.

De même $IH = HA'$.



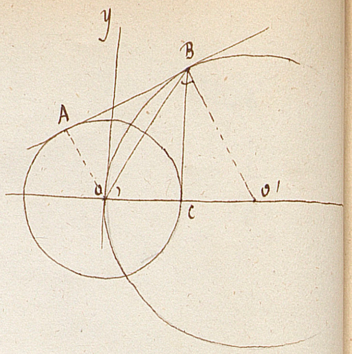
89. On donne un cercle, deux tangentes parallèles et une troisième. On a

$$AC \cdot BD = \text{const.}$$

et cette constante est R^2.

90. On donne un cercle fixe, un second

dont le centre se meut sur le diamètre ox, et reste tangent à oy, perp. à ox. on mène une tangente commune AB. Lieu des points B.



c'est la tangente Bc. — En effet l'angle AOB = OBO' comme alt. int. donc = BOO'. donc la tg. en C passe en B. donc etc.

91. Partir d'un point et y revenir sur un billard triangulaire.

92. aller d'un point à un autre par le plus court chemin en touchant une droite non dans le même plan.

on ramène au cas d'un plan en remplaçant un des points par un point du cercle passant par lui et p^r dont la droite donnée est l'axe.

---

93. trouver le volume de la pyramide par une décomposition directe.

94. Dans le calcul de π, si l'on veut une approximation donnée en décimales, lorsqu'on a obtenu un rayon et un apothème ayant un nombre de décimales communes au moins égal à la moitié du nombre de celles qui expriment l'approximation donnée, on peut substituer des moyennes arithmétiques aux géométriques, et l'on aura encore l'approximation voulue.

Soient donc deux nombres N et N+h, h ayant un nombre de chiffres au plus égal à la moitié de celui de N. La différence entre la moyenne arithméti-

-tique et la moyenne géométrique sera plus petite qu'une demi-unité. J'aurai

$$N + \frac{h}{2} - \sqrt{N(N+h)} < \frac{1}{2}$$

$$N + \frac{h-1}{2} < \sqrt{N(N+h)}$$

$$N^2 + \frac{(h-1)^2}{4} + Nh - N < N^2 + Nh$$

$$\frac{(h-1)^2}{4N} < 1$$

or cela est évident: puisque h n'a pas la moitié des chiffres de N, h^2, et à fortiori $(h-1)^2$ n'en a pas autant que N, ni autant que $4N$: donc $\frac{(h-1)^2}{4N} < 1$. Donc etc.

On évite ainsi l'extraction pénible de racines carrées.

On évitera même le calcul des moyennes arithmé-tiques par la remarque suivante.

La série des moyennes entre les nombres a et $a+h$ est

$$a+h, \quad a + \frac{h}{2}, \quad a + \frac{3h}{4}, \quad a + \frac{5h}{8}, \quad a + \frac{11h}{16}, \ldots$$

Mais on peut écrire

$$a + h = a + \frac{2}{3}h + \frac{h}{3}$$

$$a + \frac{h}{2} = a + \frac{2}{3}h - \frac{h}{2.3}$$

$$a + \frac{3h}{4} = a + \frac{2}{3}h + \frac{h}{2^2.3}$$

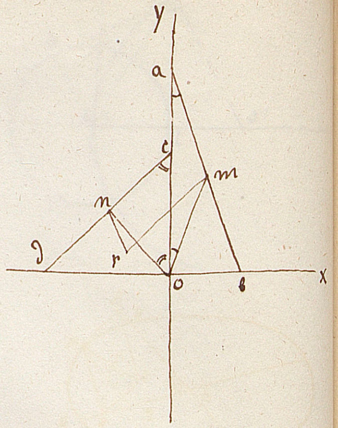
$$a + \frac{5h}{8} = a + \frac{2}{3}h - \frac{h}{2^3.3}$$

enfin le terme général est

$$a + \frac{2}{3}h + \frac{h}{2^n.3}(-1)^n$$

Ce terme tend évidemment vers zéro, au moins quant à sa dernière partie. Donc la limite est $a + \frac{2}{3}h$: c'est la limite des moyennes successives.

95. — On donne les côtés d'un angle droit ox, oy. Dans deux angles adjacents on inscrit deux droites qcq.[s] ab, cd. Par le milieu de chacune d'elles on mène une parallèle à l'autre. Le point de rencontre r de ces deux parallèles, les deux milieux m et n, et le point o sont sur une même circonférence.



Joignons en effet mo, no. — Le triangle abo est ainsi décomposé en deux triangles isocèles. De même cdo. — L'angle en r, nrm, égal à celui des deux droites, c.à.d. à $bao + dco$, est donc égal à mon. Donc le cercle qui passe par m o et n passera aussi en r, cqfd.

Nous conclurons de là que si l'on inscrit un triangle dans une hyperbole équilatère, comme les milieux des côtés sont aussi les milieux des côtés parties comprises entre les asymptotes (lesquelles sont deux droites rectangulaires) le cercle qui passe par les trois milieux des côtés du triangle passe au centre de l'hyperbole.

Ainsi le lieu des centres des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle est le cercle qui passe par les milieux des trois côtés du triangle.

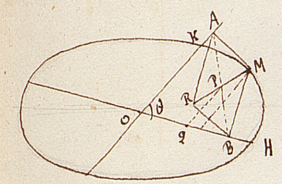
Etant donné un quadrilatère, on peut, par ses quatre sommets, faire passer une hyperbole équilatère: et comme les cercles passant par les milieux de deux côtés et d'une diagonale doivent passer au centre de l'hyperbole, il s'ensuit que ces quatre cercles passent en un même point, qui est justement le centre de l'hyperbole équilatère.

Rien ne subsiste si l'angle xoy n'est plus droit.

96. — Lieu des points tels que leur distance à une courbe du second degré donnée soit fonction rationnelle de leurs abscisses.

Ce sont des courbes du second degré. — On peut chercher le lieu de leurs foyers.

97. Discussion de la Lemniscate.



98. On prend deux diamètres conjugués d'une ellipse, et, d'un point M de l'ellipse, on abaisse sur ces diamètres des perpendiculaires MA, MB. Peut-il arriver que la diagonale MR du parallélogramme construit sur ces deux perp. soit normale à l'ellipse ?

Equation de l'ellipse : OH = a, OK = b.

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

$M = (x', y')$. — On a

$$\begin{cases} OA = y' + x' \cos\theta \\ OB = x' + y' \cos\theta \end{cases}$$

Le coeff. angulaire de MP est $\dfrac{y' - Pq}{x' - oq}$. Mais $Pq = \dfrac{OA}{2}$ et $oq = \dfrac{OB}{2}$. Donc ce coefficient est égal à $\dfrac{y' - x'\cos\theta}{x' - y'\cos\theta}$. Celui de la tangente est $-\dfrac{b^2x'}{a^2y'}$. Si l'on prend l'équation qui exprime que ces deux droites doivent être rectangulaires, elle se réduit à

$$x'y' \sin\theta \,(a^2 - b^2) = 0$$

Donc, si les deux diamètres conjugués sont égaux, la droite MR est normale à l'ellipse, quel que soit le point M.

99. On donne la base et la somme des deux autres côtés d'un triangle. Construire avec ces données le triangle maximum. —

Facile. — Il suffit de remarquer que le trian-

-gle qui a son sommet sur l'une ellipse et pour base la distance des foyers, a pour surface la double excentricité multipliée par la demi-ordonnée. Donc ...

100. Lieu des foyers d'une parabole tangente à deux droites.

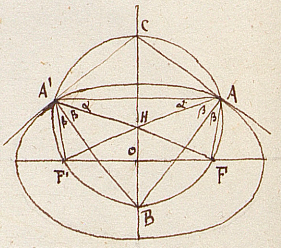
(Éq. du 4e. degré sans grand intérêt).

101. Trouver les racines de l'équation

$$0 = z^4 + z^3(a+b) - z^2(a^2+ab+b^2) - z(a^2+b^2)(a+b) + ab(a+b)^2$$

La méthode des racines entières s'applique pour a, b, et $-(a+b)$. Et l'on trouve

$$(z-a)(z-b)(z+a+b)^2 = 0$$



102. On prend deux points symétriques par rapport au petit axe d'une ellipse, A et A'. On mène les tangentes et les normales en ces deux points. Elles concourent sur le petit axe. Le cercle passant aux points C, A, A', B passe aussi aux deux foyers.

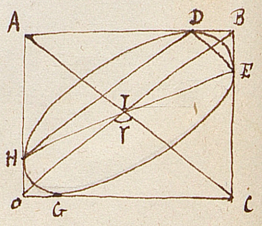
Il suffit de prouver que angle ABA' = AFA'. Or

ABA' = 180 − BAA' − BA'A = 180 − 2α − 2β

AFA' = 180 − 2β − AHF = 180 − 2β − 2α

Donc ... c.q.f.d.

103. Inscrire dans un rectangle une ellipse maximum.



Les deux diagonales sont deux diamètres conjugués. — En effet les deux tangentes OA et BC parallèles ont leurs points de contact H et E sur un même diamètre. Les cordes supplémentaires HD et DE sont donc parallèles à un système de diamètres conjugués. Mais les lignes qui passent par le point de concours de deux tangentes et le centre, comme BI, divisent les cordes de contact en deux parties égales.

or BI partage AC en deux parties égales. Donc DE est parallèle à AC. De même OH est parallèle à OB. Donc les deux diagonales sont deux diamètres conjugués.

Mais on a

$$S = \pi a'b' \sin\gamma$$

et

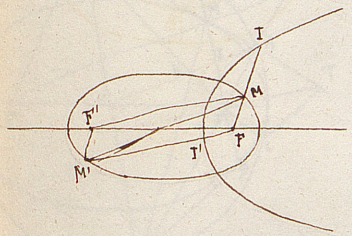
$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2 = \overline{IB}^2 = K^2$$

Il s'agit donc de trouver le maximum de $a'b'$, a^2+b^2 étant constant. – Il revient au même de chercher le maximum de $a'^2b'^2$, avec $a'^2 + b'^2 = K^2$. Pour le maxim. on aura $a' = b' = \frac{K}{\sqrt{2}}$. Les axes sont donc parallèles aux côtés du rectangle.

104. Lieu des projections du sommet d'une parabole sur ses normales.

Eq. du 4e. degré résoluble en y. – Il y a une asymptote parabolique.

105. On a une parabole et une ellipse de même foyer et de même grand axe. On a toujours



$$\frac{FM}{FI} + \frac{FM'}{FI'} = \text{Const.}$$

On le démontre aisément par les coordonnées polaires.

106. Lieu des sommets d'un angle circonscrit à une section conique.

Eq. du 4e. degré.

Si la section conique est une parabole, le lieu est une hyperbole qui a avec elle un foyer commun.

Si c'est un cercle, le lieu en est un concentrique.

107. On donne une ellipse. Par un point A de son grand axe on mène une sécante quel-

-conique. Par les points d'intersection B et C on mène deux tangentes qui concourent en D. Y a-t-il une relation entre les coeff. angulaires des droites ABC et AD?

Soit $OA = \alpha$ et $x'y'$ les coordonnées de D. — Le produit des deux coeff. angulaires est $\frac{b^2}{\alpha x'}$. Or x' est constant : c'est la distance de A à sa polaire. Donc ce produit est constant. — Les deux droites sont donc parallèles à un système de diamètres conjugués d'une conique ayant son centre en A et ayant pour axes b' et a' tels que $-\frac{b'^2}{a'^2} = \frac{b^2}{\alpha x'} = \frac{b^2}{\alpha^2 - a^2}$ ou que $x' = \frac{\alpha^2 - a^2}{\alpha}$ (Polaires des coniques).

Le point A peut aussi bien être intérieur à l'ellipse que lui être extérieur.

Dans le 1er cas, la conique secondaire est une ellipse. Dans le 2e. une hyperbole.

Plaçons A au foyer, $\alpha = +c$. alors le lieu des points D est la directrice, AB et AD sont rectangulaires, et la conique secondaire est un cercle.

108. Lieu des centres des ellipses tangentes à deux droites rectangulaires et ayant un sommet donné.

(Eq. du 3e. degré. — on peut construire en posant $y = tx$ comme au Folium de Descartes).

109. On donne deux coniques. Par le point de concours des axes on mène une infinité de cercles, ce qui détermine dans chaque conique un système de cordes perpendiculaires aux axes. On demande le lieu de leurs points de concours.

C'est toujours une courbe du second degré. Discuter. Un cercle détermine un point de la courbe. ou

point où ce cercle rencontre chaque conique, on mène une normale à celle-ci, jusqu'à son axe. On joint les pieds des deux normales : cette droite est perp. à la tangente à la courbe au point M.

110. Lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux droites et à un point soit constante.

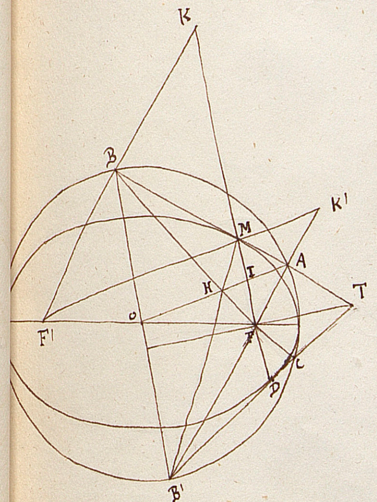
C'est une courbe du second degré, dont le point donné est un foyer. — Soit θ l'angle des deux droites ; le lieu sera

Ellipse si $\theta < 60°$

Parabole si $\theta = 60°$

Hyperbole si $\theta > 60°$

111. On a une Ellipse, le Cercle Principal, et une tangente en M.



OB est parallèle à FK. Car OF = OF' et BK = BF'.

La figure F'MBB' est donc un trapèze. — De plus IO est la ligne qui joint les milieux des bases : car FA = AK' et FO = OF'. Donc OA, parallèle à F'K', passe par le milieu de FM. — Comme, dans un trapèze, les diagonales se coupent sur la médiane, il s'ensuit que les 3 droites MB', FB et OI concourent en H.

Les 3 points A, F, B' sont aussi en ligne droite, vu que OB' = OB et IF = IM.

Par le point B' je mène une tangente B'DCT. FC est le prolongem^t^. de BF. Car l'angle en C est droit. Donc CF passe en B.

FD est parallèle à OB', comme tout-à-l'heure. Donc FD est le prolongem^t^. de MF.

Enfin TF est perp. sur MD. Car dans le triangle BB'T, BC et B'A sont déjà 2 hauteurs qui se coupent en F. Donc TF est la 3e, et est perp. à

la corde de contact MD.

Donc le lieu des points T est la directrice.

112\. Résoudre les 3 Equations

$$(1) \quad xyz = a(x+y)$$

$$(2) \quad xyz = b(x+z)$$

$$(3) \quad xyz = c(y+z)$$

J'en tire ces deux-ci

$$(4) \quad a(x+y) = b(x+z)$$

$$(5) \quad a(x+y) = c(y+z)$$

Je tire de là z en fonction de $(x+y)$: et pour cela je multiplie (4) par c et (5) par b et j'ajoute

$$z = \frac{ab+ac-bc}{2bc}(x+y)$$

Je substitue dans (1), $(x+y)$ s'en va et il reste

$$xy = \frac{2abc}{ab+ac-bc}$$

on obtiendrait de même

$$yz = \frac{2abc}{ac+bc-ab}$$

$$xz = \frac{2ab}{ab+bc-ac}$$

De là on tire facilement x, y et z.

113\. On donne entre deux angles d'un triangle la relation $\cos B = \frac{\sin A}{2 \sin C}$. On demande la relation correspondante qui existe entre les côtés.

Nous avons en général

$$\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{a}{c}$$

et

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

et ici, en particulier,

$$\cos B = \frac{\sin A}{2 \sin C}$$

J'en déduis

$$\cos B = \frac{a}{2c}$$

Reportant

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \frac{a}{2c}$$

$$b = c$$

donc le triangle est isocèle.

Quelques Enoncés.

114. Construire une conique, connaissant

1°. Un foyer, un sommet, un point.

2°. Un sommet, une tangente, la directrice

3°. " " un foyer.

Construire une parabole connaissant

1°. La directrice, deux points.

2°. Le paramètre (x), deux tangentes. (x) ou le sommet.

3°. Une tangente avec son point de contact, la directrice.

4°. " " , le sommet.

115. Lieu des sommets d'une hyperbole ayant une asymptote et une directrice fixes ; — un centre et une excentricité fixes.

Lieu des foyers des hyperboles ayant une asymptote et une directrice fixes ; — une asympt. et un sommet fixes.

116. Projection du centre d'une ellipse sur les normales.

117. Lieu des foyers ou des sommets d'une parabole touchant deux droites qcq^s.

118 Lieu des sommets — ou des foyers — d'une parabole ayant un point fixe et le foyer — ou le sommet — fixe.

Lieu des foyers des paraboles ayant une directrice et une tangente fixes ; — un sommet et

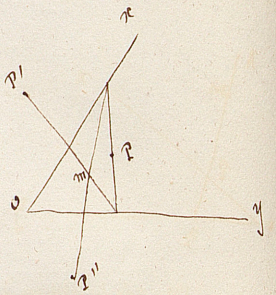
une tangente fixe.

119. Lieu du sommet d'un angle constant circonscrit à la parabole.

En déduire le problème 117.

120. Construire une Hyperbole équilatère tangente à 2 droites données.

121. Inscrire dans une ellipse une corde telle que sa longueur plus sa distance au centre soit maxima.



122. On donne ox et oy, et les 3 points fixes P, P', P''; on demande le lieu des points m, quand varie la sécante menée par le point P.

123. Le rectangle fait sur les deux parties d'une tangente comprise entre le point de contact et deux diamètres conjugués est égal au carré du demi-diamètre parallèle.

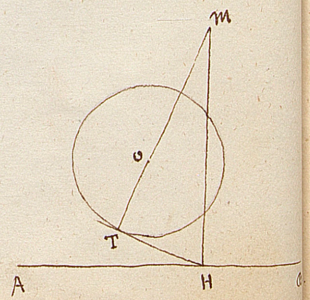
124. Lieu des points de concours des tangentes communes à une ellipse fixe et à un cercle toujours tangent à l'ellipse en un même point, mais de rayon variable.

125. On donne 4 points en ligne droite, A, B, C, D. Trouver un point o tel que les 3 angles AOB, BOC, COD soient égaux. (Bordu, 1472.)

126. Couper 4 droites données par une transversale a b c d de façon que les 3 segments ab, bc, cd soient entre eux comme 3 lignes données. (Impossible en général). (Très possible). (Difficile).

127. Lieu des extrémités des diamètres conjugués égaux dans les ellipses homofocales.

On trouve $x^2 - y^2 = \frac{c^2}{2}$.



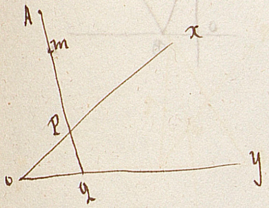
128. On a un cercle o et une droite AB. On mène une tangente qcq. TH. On mène Hm perp. à AB jusqu'à la rencontre avec TO.

Lieu des points m.

129. On a une section conique et un point o. Par ce point on mène une sécante OAB qcq. et l'on divise AB en moy. et extr. raison en m. Lieu des points m.

Ce lieu est une section conique semblable à la proposée et semblablement placée.

Le problème est-il susceptible de généralisation ?

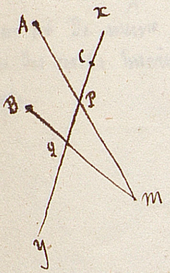


130. On a deux droites ox et oy, et un point A. Par A on mène une sécante qcq. Lieu des points m tels que $Am = PQ$.

131. Trouver la valeur, rationnelle, de x :

$$x = \sqrt[3]{20 + 14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20 - 14\sqrt{2}}$$

131. – voir les Solutions des exercices d'Arithm. de Bertrand, p. 76.



131. On donne xy, C, A et B. On mène AP, BQ telles que $CP \cdot CQ = k^2$. Lieu des points m.

132. Dans l'Hyperbole Équilatère :

1°. Le diamètre mené au point de contact d'une tangente qcq. divise en deux parties égales l'angle formé par les deux diamètres qui vont aux points où cette tangente rencontre les deux directrices.

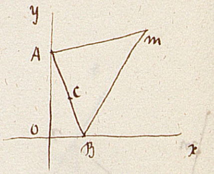
2°. Les deux côtés d'un angle circonscrit à l'Hyperbole font des angles respectivement égaux avec les droites qui joignent le sommet de l'angle aux deux foyers.

3°. Les diamètres qui vont aux deux extrémités d'une corde font respectivt des angles égaux avec ceux qui vont à l'intersection de la corde avec les deux directrices.

4°. La demi-différence des angles sous les-

-quels une corde est vue des deux foyers est supplémentaire de l'angle circonscrit (sans doute celui des tangentes aux extrémités de la corde).

5°. La portion d'une tangente qcq. interceptée entre les deux tangentes et un sommet est vue du foyer sous un angle droit.



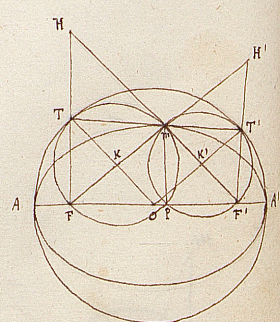
133. Par un point C donné dans un angle droit on mène une sécante AB qcq. on construit un triangle AmB semblable à un triangle donné. Lieu des points m.

On peut aussi par A et B mener des parallèles à des directions données, par ex. à ox et oy.

On peut vouloir que le triangle AmB ait une surface donnée, un périmètre donné, etc.

134. Lieu des points tels que le carré de leur distance à un point fixe soit égal au produit de leurs distances à deux droites ou à deux points fixes.

135. aire du triangle en fonction des médianes.



136. – Soit m un point qcq. d'une Ellipse. Les deux cercles décrits sur Fm et F'm comme diamètres sont tangents au cercle principal.

En effet, soit K le milieu de Fm, c'est le centre d'un de ces cercles. J'ai $KO = \frac{1}{2} F'm$. et donc $KT = \frac{1}{2} Fm$. donc ce cercle touchera le cercle principal. – Et l'autre de même.

Soit T le point de contact. Tm est la tangente en m à l'Ellipse. – C'est évident, puisque le cercle principal est le lieu des projections des foyers sur les tangentes.

mT' est de même la tangente en m. Donc

les 3 points T, m, T' sont en ligne droite..

Les deux cercles K et K' se coupent en P sur le Grand axe AA'. – Car si mP est l'ordonnée de m, l'angle mPA', droit, aura son sommet sur la circonférence K'. De même P sera sur le cercle K. Donc....

Cette propriété de mT d'être tangente en m sert à construire une hyperbole quand on connaît une tangente et le point de contact, le centre, et le grand axe en longueur.

---

137. Trouver la position d'équilibre d'une tige rigide dans une demi-sphère.

138. Lieu des centres de gravité des triangles dont la base est la distance focale d'une Ellipse, et le sommet un quelconque de ses points.
on trouve une autre ellipse. (x)

(x) Il en est de même pour le ... des centres des cercles inscrits à ce ... triangle.

139. Surface d'un polygone régulier en fonction du côté et du nombre des côtés.

140. Lieu des centres des cercles tangents à un cercle et à sa tangente.

C'est une parabole. on le voit par le calcul ; et la Géométrie le montre immédiatement.

141. Tous les triangles inscrits à un même cercle sont tels que l'on a $\frac{\sin A}{a} = m$ et réciproquement.

142. Dans un triangle si deux hauteurs ou deux bissectrices sont égales, le triangle est isocèle.

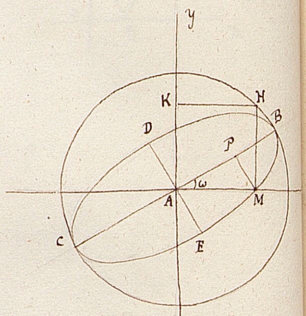
143. La bissectrice de l'angle de deux tangentes à l'Ellipse bissecte aussi l'angle formé en joignant aux deux foyers le point de concours des tangentes.

144. Etant donné un cercle et un point de son intérieur : on suppose que sur chacun des diamètres du cercle on décrive une Ellipse passant par ce point et ayant le diamètre pour grand axe. On demande

1°. L'Equation générale de ces ellipses.

2°. Le lieu géométrique de leurs foyers et des extrémités de leurs petits axes.

Soit M ce point. BC un diamètre qcq. Soit a le rayon du cercle, et ω l'angle variable BAx.



L'Equation de l'Ellipse variable, rapportée à ses axes, est

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

Reste à déterminer b : ce qui est facile puisque le point M appartient à l'ellipse et que ses coordonnées par rapport aux axes provisoires sont $MP = d \sin\omega$, $AP = d\cos\omega$, en posant $AM = d$. — on trouve $b^2 = \frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega}$. — on a en remplaçant, l'Eq. de l'Ellipse. Par un changement d'axes, on a l'Eq. générale demandée.

Cherchons le lieu des foyers. Soit ρ la demi-excentricité. on a

$$\rho = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{a^2d^2\sin^2\omega}{a^2 - d^2\cos^2\omega} = \frac{a^2(a^2-d^2)}{a^2 - d^2\cos^2\omega}$$

c'est l'Eq. polaire du lieu. — En coordonnées ordinaires, c'est

$$a^2y^2 + (a^2-d^2)x^2 = a^2(a^2-d^2)$$

Eq. d'une Ellipse rapportée à son centre et à ses axes.

Son demi grand axe est a, son demi petit axe est $\sqrt{a^2-d^2}$ ou $AK = MH$. — De plus $\overline{AM}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AK}^2$. Donc le point M est un des foyers de cette ellipse.

On peut retrouver cela géométriquement.

Pour le lieu des extrémités des petits axes : — on change ω en $\omega + 90°$. — on peut avoir ensuite l'Eq. en coordonnées ordinaires.

145. Soient, dans un triangle, r, r', r'', r''' les rayons du cercle inscrit et des cercles ex-inscrits opposés aux sommets A, B, C. on a

$$r = \frac{S}{p}, \quad r' = \frac{S}{p-a}, \quad r'' = \frac{S}{p-b}, \quad r''' = \frac{S}{p-c}$$

on en tire

$$r r' r'' r''' = S^2$$

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{r}$$

Soient h, h', h'' les 3 hauteurs. on a

$$h = \frac{2S}{a}, \quad h' = \frac{2S}{b}, \quad h'' = \frac{2S}{c}$$

d'où

$$R h h' h'' = 2S^2$$

on a aussi

$$a = S\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right), \quad b = S\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r''}\right), \quad c = S\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'''}\right)$$

$$R = \frac{1}{4}\left(r' + r'' + r''' - r\right)$$

$$ab + ac + bc = r'r'' + r'r''' + r''r''' + rr' + rr'' + rr'''$$

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} + \frac{1}{r'''} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''}$$

$$rr'r'' + rr'r''' + r'r''r''' + rr''r''' = 2Sp$$

Tout cela peut se démontrer par la Géométrie.

146. Trouver la surface du trapèze — ou du quadrilatère inscrit — en fonction des côtés. (voir 1473).–

147. Dans un triangle, le carré de la distance du centre du cercle inscrit au centre du cercle circonscrit est égal à $R(R-2r)$.

on a donc $\quad \overline{AO}^2 = R(R-2r)$

on a aussi

$$\overline{AO'}^2 = R(R+2r') \quad \overline{AO''}^2 = R(R+2r'') \quad \overline{AO'''}^2 = R(R+2r''')$$

d'où $\quad \overline{AO}^2 + \overline{AO'}^2 + \overline{AO''}^2 + \overline{AO'''}^2 = 12R^2$

148. La Somme $R+r$ est égale à la Somme des perp. abaissées du centre du cercle circonscrit sur les côtés. (1484)

Elle est aussi égale à la demi-Somme des distances du point de concours des hauteurs aux 3 Sommets.

149. La différence des carrés de deux nombres triangulaires consécutifs est un cube.

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 = n^3$$

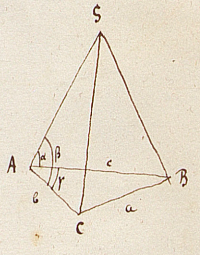
150. Trapèze maximum inscrit dans une demi-circonférence. Résolu, 1542. –

C'est le demi-Hexagone régulier.

151. Si $d, d', d'', \dots$ sont tous les diviseurs d'un nombre entier A, et qu'on multiplie successivement tous les nombres inférieurs et premiers à chaque diviseur $d^{(n)}$ par le quotient $\frac{A}{d^{(n)}}$: reconnaître 1°. que ces produits sont tous différents ; 2°. que leur nombre est A.

152. Le Volume du Tétraèdre SABC peut s'exprimer ainsi

$$S = \frac{1}{6} abc \sqrt{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$$



153. Résoudre l'Equation

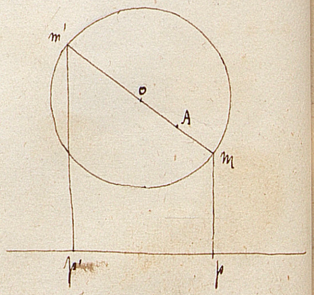
~~[illegible]~~ (~~[illegible]~~). $\sin x + \cos x = \tan x$. (~~[illegible]~~).

154. On donne un cercle et une droite. On demande un point A tel que, pour un diamètre qcq. mAm' on ait

$$mp + m'p' = K.$$

ou plutôt

$$\frac{1}{mp} + \frac{1}{m'p'} = \frac{1}{K}$$



155. Cône inscrit dans une Sphère : Maximum de son volume ou de sa Surface, totale ou seulement latérale. – Minimum pour le cône circonscrit.

156. Deux milieux sont séparés par un plan. La vitesse de la lumière dans le premier milieu est u, dans le second v. On admet que la lumière suit une route telle qu'elle doive aller de A en B dans le moins de temps possible. Quel chemin suivra-t-elle ?

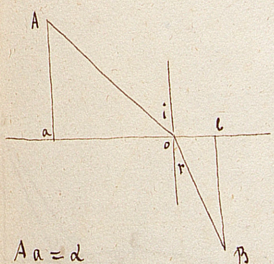
1°. La lumière se meut dans le plan perp. au plan donné, passant par les points A et B. Car autrem^t. la projection du chemin sur ce plan serait plus courte que lui.

2°. Dans chaque milieu la lumière se meut en ligne droite. — Soit t le temps que met la lumière à traverser le premier milieu, t' le second. On a

$$t = \frac{AO}{u} \qquad t' = \frac{BO}{v}$$

D'où

$$t + t' = \frac{AO}{u} + \frac{BO}{v}$$



Aa = α
Bb = β
ab = γ
ao = x

Mais on a

$$AO = \sqrt{\alpha^2 + x^2}$$

$$BO = \sqrt{(\gamma - x)^2 + \beta^2}$$

Il faut donc chercher le minimum de l'expression

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 + x^2}}{u} + \frac{\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}{v}$$

La dérivée est

$$\frac{x}{u\sqrt{\alpha^2 + x^2}} + \frac{x - \gamma}{v\sqrt{\beta^2 + (\gamma - x)^2}}$$

ou bien

$$\frac{\sin i}{u} - \frac{\sin r}{v} = 0$$

D'où

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{u}{v} \qquad \text{cqfd.}$$

Lorsque o va de a en b, $\frac{\sin i}{\sin r}$ varie de 0 à ∞. Donc il peut être égal à $\frac{u}{v}$.

157. Discuter la courbe

$$\rho = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\omega}}$$

c'est $xy = \frac{a^2}{2}$ en coordonnées ordinaires.

158. Conchoïde.

159. Lieu des projections du centre de l'Hyperbole sur ses tangentes.

160. La somme des inverses des carrés de deux diamètres rectangulaires est égale à la somme des inverses des carrés des axes (dans une ellipse qcq.).
on le démontre en prenant l'équation

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 = P$$

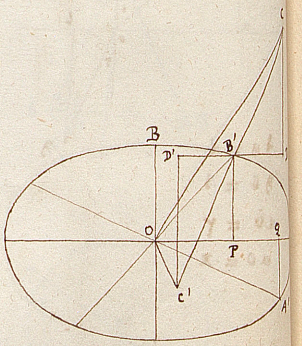
ces deux sommes sont égales à $\frac{A+C}{P}$.

161. Théorème de Chasles.

On donne, en grandeur et en direction, deux diamètres conjugués d'une ellipse : $OA' = a'$, $OB' = b'$. on demande les axes.

Du point B', abaissez $B'C'$ perpend. sur OA' : prenez $B'C = B'C' = a'$. vous aurez $OC = a+b$ et $OC' = a-b$.

De plus, l'axe OA bissecte l'angle COC'.



Tout cela est facile à démontrer. — En effet on a

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2$$

$$2ab = 2a'b' \sin\theta$$

d'où

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\theta$$

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\theta$$

ce qui prouve déjà que $a+b = OC$ et $a-b = OC'$.
Reste à voir que OA bissecte l'angle COC'. — Je construis la figure. Il est clair que les deux trois trois

Triangles CB'D, C'B'D' et OA'Q sont égaux. — Cela posé, j'aurai

$$\text{Tg. COA} = \frac{B'P + CD}{OP + B'D} \qquad \text{Tg. C'OA} = \frac{C'D' - B'P}{OP - B'D'}$$

ou bien, en appelant x' et y' les coord. de B', x'' et y'' celles de A',

$$\text{Tg. COA} = \frac{y' + x''}{x' - y''} \qquad \text{Tg. C'OA} = \frac{x'' - y'}{x' + y''}$$

or x'' et y'' peuvent s'exprimer en fonction de x' et y'. Car le coefficient angulaire de OA' (parall. à la tg. en B') est $-\frac{b^2x'}{a^2y'}$. Donc x'' et y'' se tirent des 2 Eq.

$$\begin{cases} a^2y''^2 + b^2x''^2 = a^2b^2 \\ y'' = -\frac{b^2x'}{a^2y'}\,x'' \end{cases}$$

qui donnent

$$\begin{cases} x'' = \frac{ay'}{b} \\ y'' = -\frac{bx'}{a} \end{cases}$$

En substituant, on trouve

$$\text{Tg. COA} = \text{Tg. COA'} = \frac{a}{b}\cdot\frac{y'}{x'}$$

Le théorème est donc démontré.

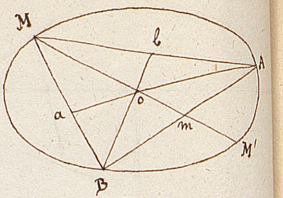
On peut remarquer que $CO + C'O = 2a$.

162. Dans une ellipse rapportée à deux diamètres conjugués, on a $b'^2 = ay$, y étant l'ordonnée qui passe au foyer.

163. On donne un point M sur une ellipse: on le joint à deux autres points A et B pris aussi sur cette ellipse. Trouver ces deux points tels que la surface ABM soit maxima.

Supposons le point B trouvé. Pour que la surface

soit maxima, le point A doit être le point de contact de la tangente parallèle à MB : c'est évident. — De même la tangente en B doit être parallèle à MA. — Enfin je dis que la tangente en M doit semblablement être parallèle à AB.



En effet : joignons A au milieu a de MB : cette ligne Aa est une médiane : mais c'est aussi un diamètre, donc elle passe au centre o. De même la seconde médiane Bb passe en o. Donc o est le point de concours des médianes et Mm est aussi une médiane : le point m est le milieu de AB. Donc la tangente en M est parallèle à AB.

De plus on a $om = \frac{1}{2} oM = \frac{1}{2} oM'$.

D'où la construction : Par le point M on mène le diamètre MOM' : on prend m milieu de OM', et l'on y mène par m une parallèle AB à la tangente en M. On a ainsi MAB, le triangle maximum cherché.

Si l'on considère le cercle dont l'ellipse est la projection, le point M est la projection du point μ. Le triangle maximum passant par le point μ est le triangle équilatéral $\mu\alpha\beta$ qu'on obtient en menant un diamètre et élevant une perpendiculaire au milieu K de la seconde partie de ce diamètre. MAB est donc la projection de $\mu\alpha\beta$. Cette projection est égale au triangle équilatéral multiplié par $\frac{b}{a}$. — On voit que, quel que soit le point M, la surface maxima sera la même. — Sa valeur est $\frac{3ab\sqrt{3}}{4}$.

164. Lieu des pieds des perpendiculaires abaissés du centre d'une ellipse sur les cordes qui joignent les extrémités de deux diamètres rectangulai-

-ses quelconques. — Le lieu est un cercle.

En effet, soit I le pied de cette perpendiculaire. on a (voir 83) :

$$\frac{1}{\overline{OP}^2} = \frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}$$

et d'ailleurs (160)

$$\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

Donc etc.

165. Un cercle coupe une Ellipse en quatre points si on les joint en croix, et qu'on mène les Bissectrices des angles de ces deux lignes, elles seront parallèles aux axes.

Soient AA', BB' les deux lignes de jonction, O leur point de rencontre. — Je les prends pour axes coordonnés. L'Equation de l'Ellipse sera

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Exprimons qu'on a $OA.OA' = OB.OB'$. Pour cela remarquons que

pour $x=0$ on a $Ay^2 + Dy + F = 0$ donc $OB.OB' = \frac{F}{A}$

pour $y=0$ on a $Cx^2 + Ex + F = 0$ donc $OA.OA' = \frac{F}{C}$

donc $A = C$. Donc l'Eq. de l'Ellipse devient

$$Ay^2 + Bxy + Ax^2 + Dy + Ex + F = 0$$

(x) En général, la direction des axes est donnée par la formule

$$\delta = \frac{A - C \pm \sqrt{(A-C)^2 + B^2}}{B}$$

ici $A = C$. donc $\delta = \pm 1$

Donc les axes sont les Bissectrices des axes coordonnés, C q f D.

(x) Cela est faux, puisque les axes ne sont pas rectangulaires. Mais la forme de l'Eq. montre le Th. car si l'on transporte l'Ori. les axes parallèlement à eux-mêmes de façon que les termes du 1er degré disparaissent, l'Eq. devient

$Ay^2 + Bxy + Ax^2 + F' = 0$

Elle est symétrique en y et x donc les bissectrices des axes sont deux axes de la courbe.

166. Pour que deux Sections coniques se coupent en quatre points situés sur une même cir-

-conférence, il faut et suffit que les axes de ces deux sections soient parallèles.

Cela résulte du Th. précédent, et se démontre d'ailleurs avec facilité.

167. Par un point o pris dans le plan d'une ligne du second ordre, on mène une infinité de cercles concentriques. Chacun d'eux coupe la courbe en quatre points qu'on joint en croix. On demande le lieu des points de concours m.

Je prends pour axes deux droites passant en o et parallèles aux axes de la courbe. Son équation sera

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

Soient $\alpha\beta$ les coord. du point m. – Les équations des deux lignes qui y passent sont de la forme

$$y - \beta = K(x - \alpha)$$

Et, comme ces deux droites sont également inclinées sur les axes (165), leurs équations seront

$$\begin{cases} y - \beta = K(x-\alpha) \\ y - \beta = -K(x-\alpha) \end{cases}$$

et les deux droites pourront se représenter ainsi

$$(y - \beta - Kx + K\alpha)(y - \beta + Kx - K\alpha) = 0$$

Ce système doit rencontrer la courbe en quatre points situés sur un cercle dont le centre est à l'origine. Si donc on retranche de l'équation de la courbe cette dernière Eq. multipliée par un facteur indéterminé p, on devra pouvoir identifier l'Eq. résultante, c.à.d.

$$Ay^2 + Cx^2 + Dy + Ex + F - p(y-\beta-Kx+K\alpha)(y-\beta+Kx-K\alpha) = 0$$

avec l'équation d'un cercle ayant son centre à l'origine. Pour cela, il faudra que l'on ait

$$A - p = C + k^2 p$$

d'où

$$p = \frac{A-C}{1+k^2}$$

et ensuite

$$D + 2\beta p = 0$$

$$E - 2k^2 \alpha p = 0$$

Eliminant p et k^2 entre ces 3 Equations, il vient, pour l'Equation du lieu cherché

$$2(A-C)\alpha\beta + D\alpha - E\beta = 0$$

Equation d'une hyperbole équilatère.

Elle est vérifiée par les coordonnées du centre de la Section conique. $x' = -\frac{E}{2C}$, $y' = -\frac{D}{2A}$. Donc cette hyperbole passe au centre.

Elle passe aussi par les pieds des normales abaissées du point o sur la Section conique. — En effet, l'Equation d'une normale au point $x'y'$ de cette section est

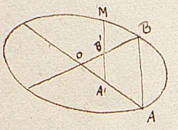
$$y - y' = \frac{2Ay' + D}{2Cx' + E}(x - x')$$

J'exprime que la normale passe à l'origine. J'en tire entre x' et y' la Relation

$$2(A-C)x'y' + Dx' - Ey' = 0$$

c'est justemt. l'Equation du lieu trouvé. Donc ...

168. Maximum de l'angle de deux Tangentes à une Ellipse, issues d'un même point de la Directrice.



169. Soient OA, OB deux diamètres conj. d'une Ellipse, B'A' une parallèle quelconque à BA. On a

$$\overline{MA'}^2 + \overline{MB'}^2 = k^2$$

170. Par un point pris sur une Section conique, on mène une Infinité de Systèmes de Sécantes

deux à deux Rectangulaires: les lignes qui joignent leurs extrémités passent toutes par un même point pris sur la normale.

Je prends pour axes la tangente et la normale. Il est facile de voir que l'équation de la courbe se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy = 0$$

Les deux sécantes seront

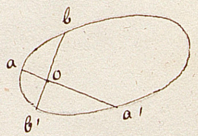
$$y = mx$$

$$y = -\frac{1}{m}x$$

Le calcul se fait tout bêtement: on trouve que la ligne de jonction coupe l'axe des y au point

$$y = -\frac{D}{A+C}$$

171. Soit o un foyer d'une Ellipse, aa', bb' deux cordes Rectangulaires quelconques. on a



$$\left(\frac{1}{oa} + \frac{1}{oa'}\right)^2 + \left(\frac{1}{ob} + \frac{1}{ob'}\right)^2 = \text{Const.}$$

172. Dans une Ellipse, les cordes passant par le foyer sont proportionnelles aux carrés des diamètres parallèles.

La somme des cordes conjuguées passant par le foyer est constante. Voir 182.

173. Construire une hyperbole connaissant le centre, une asymptote et un point.

au moyen du point et du centre, on aura facilement un point de l'autre asymptote, qui est d'ailleurs à la même distance du centre que la première.

174. on donne deux paraboles, dont l'une n'est que l'autre déplacée 4 dans le sens de son axe. on mène une tangente qcq. à la parabole intérieure.

L'aire comprise entre cette tangente et la parabole extérieure est constante.

175. On a deux cercles. on mène une tangente à l'un. Elle coupe l'autre en deux points : en ces points on mène deux tangentes : elles se coupent en m. Lieu des points m.

Confer : 181

176. Quand trois sections coniques se coupent en quatre points, les diamètres conjugués à une direction donnée se coupent en un même point.

Soit $f=0$ la première conique, $f'=0$ & $f''=0$ les deux autres. comme la 3e. passe par les points communs aux deux premières, on a $mf + m'f' = f''$: et si A, A', A'' ; B, B', B'' ; .. sont les coefficients de ces 3 Equations, on a

$$mA + m'A' = A''$$
$$mB + m'B' = B''$$
etc.

Pour avoir le diamètre parallèle (conj. à celui qui est) à l'axe des y, qui est qcq. je remarque que son Eq. est

$2Ay + Bx + D = 0$ pour la 1re. courbe
$2A'y + B'x + D' = 0$ " 2e "
$2A''y + B''x + D'' = 0$ " 3e "

Mais, en appelant $\varphi, \varphi', \varphi''$ les 3 premiers membres, on a $\varphi'' = m\varphi + m'\varphi'$. Donc le 3e. diamètre passe par les points communs aux deux autres.

On peut se servir de cette propriété pour trouver le centre d'une conique dont on connaît cinq points. Mais il est plus simple de se servir de l'Hexagone de Pascal.

177. La somme des distances d'un foyer d'une Ellipse aux ~~triangle~~ sommets du triangle inscrit maximum est constante, dans qq. position que soit ce triangle (v. 163)

178. Maximum ou minimum de

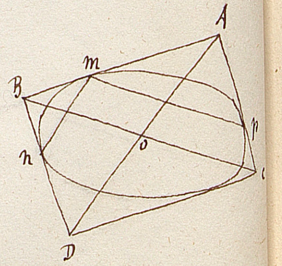
$$(2-x)(2+x)(3-x)(3+x)$$

179. Billard Elliptique.

180. Lieu des points dont les distances à deux cercles sont dans un rapport donné.

181. Lieu des centres des coniques passant par 4 points (poser F=1). N. 1519. Confer: 176.

182. Dans un quadrilatère, les six milieux des côtés et des diagonales, les trois points d'intersection de deux diagonales et de deux côtés opposés, enfin les 3 points d'intersection des parallèles menées soit à chaque diagonale par le milieu de l'autre, soit à chaque côté par le milieu du côté opposé, sont 12 points appartenant à une même conique. — Quelle relation existe entre le centre et ces points ? — Enfin les 3 couples de deux droites menées par le centre parallèlement soit à deux diagonales soit à deux côtés opposés sont 3 systèmes de diamètres conjugués.



183. On mène à une ellipse quatre tangentes rectangulaires. — Les diagonales AD, BC sont deux diamètres conjugués. — La somme des cordes mn + mp est constante. — L'enveloppe des cordes mp est une ellipse homofocale de la première. — mp et mn sont également inclinées sur AB. —

184. — Voir 172. — Si par un foyer d'une ellipse on mène deux cordes à angle droit, la somme des inverses est constante.

Si l'on mène par un foyer une corde AB, on a $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} = \text{Const.}$

185. Du foyer F d'une ellipse on mène une corde FA. On prend AM parallèle à l'axe (M en dehors de l'ellipse) telle que $\frac{AM}{AF} = k$. Lieu des points M.

185. bis. Lieu des seconds foyers d'une ellipse passant par deux points et ayant un foyer donné.

186. Inscrire dans un triangle une ellipse maximum.

187. On donne deux ellipses. On mène les tangentes parallèles. Lieu des intersections des diamètres passant par les points de contact.

188. On donne une série de points. Par une origine fixe on mène une série de droites, sur lesquelles on prend des longueurs inversement proportionnelles à la racine carrée de la somme des carrés des perp. abaissées des différents points sur ces droites. Lieu des extrémités de ces lés droites.

Déterminer l'origine ~~des différents points~~ de telle sorte que la courbe soit fermée, et que sa surface soit maximum ou minimum.

189. Développée de la courbe $y = x^3$.

Lieu des points d'où l'on peut lui mener 3 tangentes — ou 2 tangentes.

190. S'il existe dans une courbe deux axes parallèles, il y en a un 3e. parall. aux deux premiers.

S'il y en a deux faisant entre eux l'angle θ, il y en a une série d'autres faisant entre eux le même angle θ.

191. Soient $f^{n-1}(x)$, $f^{n}(x)$, $f^{n+1}(x)$ trois dérivées successives de $f(x)$: si l'on élimine x entre les deux équations

$$f^{n}(x) = 0$$
$$f^{n-1}(x)\, f^{n+1}(x) = y$$

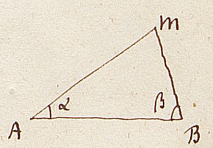
on aura une Eq. en y dont toutes les Racines seront Réelles et négatives.

192. Si une courbe a 3 centres elle en a un 4e. au dernier sommet du parallélogramme dont les 3 autres centres sont les 3 premiers sommets.

193. Lieu Géométrique des extrémités des arcs de cercle d'une longueur constante, mais de Rayon variant, tangents en leur milieu au point P d'une droite. On trouve $\rho = a \frac{\sin\omega}{\omega}$.

194. Trois points A, B, C étant donnés, trouver dans leur plan un cercle tel que les tangentes menées des trois points forment des angles circonscrits égaux à 3 angles donnés. Nov 1518.

195. Lieu des points m tels que $\beta - \alpha = k$. C'est une Hyperbole. Lieu de ses sommets si k varie.



196. Une Ellipse donnée reste toujours tangente en un même point à une droite fixe. Lieu de ses centres.

197. Une Ellipse et une Hyperbole ont même Grand axe et mêmes sommets. On mène une tangente à l'Ellipse. Elle coupe l'Hyperbole en deux points, en lesquels on mène des Tg. à l'Hyp. Les deux tangentes se coupent toujours sur l'Ellipse.

198. Une droite de longueur constante se meut dans une Ellipse. Lieu des pieds des perp. abais.

-sées de l'origine sur cette droite. — Enveloppe de cette droite.

199. On donne une courbe du second ordre. Lieu des milieux des cordes qui passent par un même point. — En déduire l'équation du diamètre.

200. Étant donnés trois points non en ligne droite, construire un triangle égal à un triangle donné et dont les côtés passent par ces points.

Ritt. 201. Inscrire dans un triangle trois cercles tangents chacun à deux côtés et aux deux autres cercles.

(x) voir 1474. (x) 202. Calculer la somme $S = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n$.

203. Connaissant la relation $a + b + c = 180°$, démontrer que l'on a

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos\frac{a}{2} \cos\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2}$$

$$\sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{b}{2} \cos\frac{c}{2} \quad (?)$$

$$\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4 \sin a \sin b \sin c$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$$

V. 1481. 204. Démontrer que le quadrilatère maximum qu'on peut faire avec quatre droites de longueurs données est inscriptible. (facile par le dx).

205. Démontrer que l'angle θ des deux diagonales d'un quadrilatère est donné par la formule

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4S}{b^2 + d^2 - a^2 - c^2} \qquad \text{V. 209.}$$

206. Dans un tétraèdre, le volume V est

$$V = \frac{1}{6} ab\,\delta \sin\theta$$

a, b étant deux arêtes opposées, θ leur angle, δ leur

plus courte distance.

207. Si l'on a $p^2+q^2=1$; $p'^2+q'^2=1$, $pp'+qq'=0$
on a aussi $p^2+p'^2=1$, $q^2+q'^2=1$, $pq+p'q'=0$.
(on observe qu'on peut poser $p=\sin\alpha$, $q=\cos\alpha$ etc).

208. Diviser le quadrant en trois parties telles que l'on ait $\frac{\cos x}{a}=\frac{\cos y}{b}=\frac{\cos z}{c}$. (~~voir 1475 la sol~~.) Résolu n°. 1475.

209. voir 205. On a aussi $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{(p-b)(p-d)}}$

210. Courbe du Réverbère.

211. On donne une Ellipse rapportée à ses axes. Sur chaque ordonnée comme diamètre on décrit un cercle. Lieu des intersections successives de tous ces cercles.

À partir de quel moment tous les cercles seront-ils intérieurs l'un à l'autre ?

212. Dans un triangle sphérique dont α est l'Hypoténuse et h la hauteur on a

$$\sin\alpha : \sin\beta :: \sin\gamma : \sin h$$

et

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}$$

213. Démontrer que si $\varphi(x)=0$ (à coeff. rationnels) a une racine commune avec $x^3-10=0$, la première admet aussi les 2 autres racines de la seconde.

Pourquoi ? — Cette propriété peut-elle s'étendre à d'autres nombres que 10, à d'autres degrés que le 3e ?

214. On donne un cercle O ; on lui mène une infinité de tangentes AB terminées à deux diamètres rectangulaires. Lieu des milieux de AB, des points de concours des médianes ou des bissectrices du

triangle AOB, des centres de ses cercles circonscrits, des points de contact des cercles ex-inscrits etc.

215. Lieu des sommets d'un angle droit tangent à deux circonférences concentriques ou non (Se résout par un cercle) (C'en est un si les 2 Cf. sont concentriques).

Enoncés de Problèmes, tirés des annales de Guyonne.

(Nota. ceux qui sont marqués d'un astérisque sont résolus dans mes notes sur Guyonne).

(*) 216. Trouver l'Eq. la plus générale des courbes planes telles que toutes leurs cordes passant par un point sont égales.

217. Circonscrire à un cercle un triangle qui ait ses sommets sur 3 droites indéfinies données de position.

218. Partager un tétraèdre en deux parties équivalentes par un plan qui coupe le solide suivant un quadrilatère, et de telle façon que l'aire de ce quadrilatère soit un minimum.

219. Partager un cercle, avec la règle et le compas, en un nombre donné quelconque de parties égales à la fois en surface et en contour. (Solut. connue).

(*) 220. Quel est le point du plan d'un triangle dont la somme des distances aux 3 sommets est minima?

221. – Inscrire 3 cercles à un triangle, de manière que chacun touche les deux autres et deux côtés du triangle. N. Ritt.

(×) 222. Trouver sur les plans ~~côtés~~ d'un angle ~~deux~~ un points tels que la somme de ~~leurs~~ ses distances à un point donné ~~soit maxima~~ et aux côtés de l'angle soit minima.

223. Dans tout quadrilatère, la droite qui joint les milieux des deux diagonales passe par l'intersection des deux droites qui joignent les milieux des côtés opposés. (facile par la considération de la fig. qui sert à 227)

Cela se voit immédiatement par des considérations de statique.

224. Construire un triangle égal à un triangle donné et dont les côtés passent par 3 points. (facile)

225. Construire un triangle égal à un triangle donné, et dont les côtés passent par sommets soient sur 3 droites données. (Id.)

226. À un triangle donné, inscrire un triangle équilatéral minimum, ou lui en circonscrire un maximum. Résolu dans Ritt.

Cas où le triangle équilatéral serait, plus généralement, un triangle semblable à un triangle quelconque.

227. Construire un quadrilatère dont on connaît les 4 côtés et une médiane. (Connu).

228. Les droites qui vont de l'un qcq. des points d'une hyperbole équilatère aux deux extrémités d'un même diamètre transverse qcq. sont également inclinées à l'une qcq. des asymptotes.

229. Une table triangulaire dont les dimensions sont données est soutenue horizontalement, à ses trois angles, par trois piliers verticaux dont les forces F, F', F'' sont données. On demande

1°. le plus grand poids que peut supporter chaque point de la table ;

2°. la courbe renfermant tous les points de la table qui peuvent supporter un poids donné P.

230. Trouver le plan sur lequel projetant orthogonalement un triangle donné, sa projection soit un triangle semblable à un autre triangle donné.

231. Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des carrés des deux diagonales est double de la somme des carrés des deux médianes. (voir 1476).

Cela résulte, par la méthode projective, du même th. dans le cercle, démontré n°. 667.

232. Si à une ellipse on circonscrit un quadrilatère qcq. le point d'intersection des deux droites qui joindront les points de contact de l'ellipse avec les côtés opposés de ce quadrilatère coïncidera avec le point d'intersection de ses deux diagonales.

(x) 233. Deux suites, composées chacune de n nombres positifs et inégaux, étant données, comment peut-il disposer entre eux les nombres de ces deux suites pour que la somme des produits des termes de la première par les termes correspondants de la seconde soit maximum ou minimum.

Même question pour la somme des quotients.

234. I. Le plan bissecteur d'un dièdre d'un tétraèdre partage l'arête opposée en deux segments proportionnels

aux aires des faces correspondantes. (Connu)

II. La droite qui, partant d'un sommet d'un tétraèdre fait des angles égaux avec les 3 faces adjacentes rencontre sa base en un point tel qu'en le considérant comme le sommet commun de 3 triangles ayant pour bases les 3 côtés de cette base, les aires de ces triangles sont proportionnelles aux aires des faces correspondantes. (Conséquence du précédent).

235. Des arcs de cercle, en nombre infini, de mêmes longueurs, mais de différents rayons, situés dans un même plan, touchant d'un même côté, par leur milieu, une même droite, en un même point; déterminer l'Eq. de la courbe qui contient les extrémités de ces arcs.

Des calottes sphériques, en nombre infini, de mêmes surfaces mais de différents rayons, touchant d'un même côté par leurs pôles, un même plan, en un même point: déterminer l'Eq. de la surface qui contient les circonférences de ces calottes. — C'est une sphère. Cela résulte immédiatement du th. 237.

236. Trouver sur le plan de l'une des bases d'un prisme (ou plus gén. d'un tronc de pr.) triangulaire un point dont la somme des distances aux trois sommets de l'autre base soit un minimum. (*)

237. Théorème (d'Archimède). Le cercle décrit sur une sphère avec une ouverture de compas qcq. détermine sur cette sphère une calotte équivalente au cercle décrit sur un plan avec la même ouverture de compas. — Très facile.

facile

238. M et M' étant deux points d'une parabole, o le point de concours des tg. en ces points, et F le foyer, on aura

$$\frac{\overline{MO}^2}{MF} = \frac{\overline{M'O}^2}{M'F}$$

d'où il suit que si F tombe sur MM', le sommet de l'angle O, qui devient droit, est sur la directrice, et OF est perp. sur MM'.

Très facile par la Géom. analyt.

239. — Les Rectangles qui ont resp. pour diagonales deux diamètres conjugués d'une Ellipse ou d'une hyperbole, et dont les côtés sont parallèles aux axes de la courbe, sont équivalents.

240. Théorème. — Les pieds des perp. abaissées sur les plans des faces d'un tétraèdre, de l'un q.cq. des points de la surface de la sphère circonscrite, sont tous quatre situés dans un même plan.

(x)

241. Si deux Ellipses, tellement situées dans un plan que deux diamètres conjugués de l'une soient parallèles à deux diamètres conjugués de l'autre, se coupent en 4 points, ces quatre points seront sur une 3e. Ellipse dans laquelle les diamètres conjugués égaux seront respectivemt. parallèles aux diamètres conjugués que l'on suppose être déjà parallèles dans les deux premières. —

(√)

242. Trois cercles tracés sur un même plan étant tels que chacun d'eux touche les deux autres; trouver le rayon du cercle qui passe par leurs trois points de contact, en fonction des rayons de ces trois cercles. (facile, puisque ce cercle est inscrit au triangle formé en joignant les 3 centres).

Même question pour 4 sphères dont chacune est tangente aux trois autres.

(×) 223. Dans toute ligne du second ordre qui a un centre, si l'on mène deux tangentes parallèles à une même droite fixe qcq: et une 3e. Tgte. variable: le produit des segments des deux premières tangentes compris depuis leurs points de contact jusqu'à la 3e. sera une quantité constante.

224. Quelle surface décrit le sommet d'un angle trièdre trirectangle dont les {arêtes / faces} touchent perpétuellement une surface du 2d. ordre?

225. AB est une horizontale donnée sur le milieu de laquelle on a élevé verticalemt. une perp. indéfinie; on demande en quel point C de cette verticale doit être placé le centre d'un pendule d'une longueur = CA ou CB, pour que ses oscillations commençant en A et se terminant en B s'exécutent dans le moindre temps possible.

226. Quel est le nombre dont les puissances successives ont pour leurs n derniers chiffres à droite les n derniers chiffres de ce nombre, disposés entre eux de la même manière que dans le nombre dont il s'agit?

227. Diviser graphiquement l'aire d'un triangle en en un nombre qcq. de parties égales, par des parallèles à sa base. (facile, en prenant les parallèles pour inconnues.)

Même question pour le volume d'un tétraèdre.

228. Construire un triangle, connaissant les distances des côtés au centre du cercle circonscrit, ou celles des sommets au centre du cercle inscrit.

229. Tout quadrilatère, plan ou gauche, rectiligne

ou Sphérique, dans lequel la somme de deux côtés opposés est égale à la somme des deux autres côtés, est circonscriptible au cercle.

facile. 250. Quel est le > et quel est le < des 3 carrés inscrits à un triangle scalène ?

(x) 251. – Étudier les grands cercles, axes radicaux de deux petits cercles d'une sphère.

252. – Deux sections coniques coexistant d'une manière qcq. sur un même plan, on demande 1°. quel est le lieu des pôles de chacune qui correspondent à toutes les tangentes de l'autre ; 2°. à quelle courbe sont tangentes toutes les droites qui, considérées par rapport à chacune, ont leurs pôles sur l'autre.

253. – On sait que, lorsque deux polygones semblables sont semblablement situés sur un même plan, c.à.d. lorsqu'ils ont leurs côtés homologues parallèles, les droites qui joignent leurs sommets homol. concourent en un même point qu'on peut appeler le centre de similitude des deux polygones. On peut de plus appeler axe radical des 2 polygones la droite qui joint les intersections de deux qcq. des côtés du premier avec leurs homologues dans le second.

Cela posé on propose de démontrer que, 3 polygones semblables étant semblablem^t. situés dans un même plan, 1°. les 3 centres de simil. sont en ligne droite ; 2°. les 3 axes rad. se coupent en un même point.

254. – Un nombre n, >2, est ou non premier selon que $2^{n-1}-1$ est ou non divisible par n.

255. – Quel est le point de l'intérieur d'un triangle duquel menant {des droites à ses sommets / des perp. sur ses côtés} ces droites le

divisent en 3 { triangles / quadrilatères | Equivalents ?

256. Quelles que soient la nature et la situation respective de deux sections coniques tracées sur un même plan, il est permis toujours de considérer leur système comme la perspective du système de deux cercles tracés sur un même plan. — Déterminer en outre toutes les diverses situations de l'oeil qui donnent en effet le système de deux cercles pour perspective de ces deux courbes. —

257. Quelles que soient la nature et la situation respective de deux sections coniques, tracées sur un même plan, il est toujours permis de considérer leur système comme la perspective d'un 2 système de deux cercles tracés sur un autre plan. — Déterminer les diverses situations de l'oeil qui donnent en effet le système de deux cercles pour perspective de ces deux courbes.

258. Quelle est la courbe qu'enveloppe dans son mouvemt. une droite de longueur constante, perpétuellemt. inscrite à une même section conique? Quel est le lieu du sommet de l'angle variable circonscrit dont cette droite est la corde de contact?

259. Quel est le lieu du sommet d'un angle mobile de grandeur constante, circonscrit à une section conique, et quelle est l'enveloppe de ses cordes de contact ?

260. Quel est le lieu des sommets d'un cône circonscrit à une surface du 2e. ordre, et tel qu'il intercepte toujours une portion équivalente de la surf. d'une sphère d'un rayon constant qui aurait son centre à son sommet? et quelle est l'enveloppe des plans de contact ?

261. Enveloppe des plans qui déterminent dans une surf. du 2e. degré une section de surface constante ; et lieu des sommets des cônes circonscrits suivant la section. —

§ 1°. Le centre de gravité.
2°. Le centre du cercle circonscrit.

262. — Décrire une Section Conique qui en touche cinq autres, au nombre desquelles peuvent se trouver des points et des droites.

(x) 263. Un point P étant pris arbitrairement dans l'intérieur d'un triangle rectiligne ABC, et A' B' C' étant les points où ses côtés sont respectivement rencontrés par les prolongements des droites menées respectivem.t à ce point P des sommets A B C, on doit avoir

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}=1$$

Dans un tétraèdre, on aura semblablem.t

$$\frac{PA'}{AA'}+\frac{PB'}{BB'}+\frac{PC'}{CC'}+\frac{PD'}{DD'}=1$$

264. Quelle est l'enveloppe d'un cercle mobile de rayon donné dont le centre décrit une ellipse donnée ?

265. Quelle courbe doit décrire le centre d'un cercle pour que l'enveloppe de ce cercle soit une ellipse donnée ?

266. On sait que le lieu des tangentes à une courbe à double courbure est une surface développable dont cette courbe est l'arête de rebroussem.t — La courbe étant donnée, la surface développable l'est aussi, et, si on l'étend sur un plan, son arête de rebroussement deviendra une courbe plane qui sera également donnée. — Mais si au contraire la courbe plane est donnée, elle pourra être considérée comme l'arête de rebroussem.t d'une infinité de surfaces développables toutes différentes les unes des autres ; mais ayant toutefois un caractère commun ; et que, par leur développem.t on a appliquées sur un plan. — Ces remarques donnent lieu aux deux questions suivantes :

I Quelle courbe plane devient une courbe à double courbure donnée, lorsqu'on applique sur un plan la surface développable dont cette courbe est l'arête de

Rebroussement ?

II. Quelle est l'Eq. générale de toutes les surfaces développables telles qu'en les appliquant sur un plan, leur arête de rebroussement devient une courbe plane donnée ?

267. Lieu des points de contact d'une droite qui se meut parallelement à elle-même en restant tangente à une série d'ellipses qui toutes ont mêmes foyers. (C'est une hyperbol. équil. concentrique aux ellipses et passant par les deux foyers).

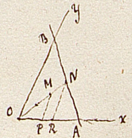
268. Quel est le lieu des centres des sections circulaires faites dans une surface du second ordre ?

269. Quel est le lieu des foyers des sections faites dans une surface du second ordre par des plans parallèles 1° à un plan fixe, 2° ou à une droite fixe ; — ou par des plans qui passent par un même point ?

270. Par un point donné dans un angle et également distant de ses deux côtés, mener une droite terminée à ces mêmes côtés, de telle sorte que le point donné la divise en deux segments dont la somme des carrés soit donnée (Conc. Gén. 1819)

271. Une droite se meut sur le plan d'un angle donné de manière à former avec les côtés un triangle dont l'aire soit constante ; lieu du centre de gravité de l'aire de ce triangle, point déterminé par par la condition que les droites qui le joignent aux 3 sommets du triangle partagent ce triangle en 3 parties équivalentes ? (id.)

Même problème pour un tétraèdre : (id.).



$\frac{1}{2} ab \sin\theta = m^2$

$x = OP = \frac{2}{3} OR = \frac{2}{3} \frac{a}{2} = \frac{a}{3}$

$y = \frac{b}{3}$

$\frac{9}{2} xy \sin\theta = m^2$

hyperbole.

(x) 272. Théor. Le lieu des milieux des cordes menées à une section conique qcq. par un même point qcq. de son plan, est une autre sect. conique.

273. Lieu des milieux des cordes d'une section conique

quelconque, tangentes à une autre section conique donnée comme la première.

274. Un point étant donné dans un angle droit trièdre, et également distant de ses trois faces, on demande de conduire par ce point un plan tellement dirigé qu'il coupe le trièdre suivant un triangle semblable à un triangle donné.

275. Partager la surface d'un quadrilatère qcq. en 4 parties équivalentes par deux droites perp. entre elles et se coupant dans son intérieur.

Même problème pour le quadrilatère sphérique.

276. Quelles sont les valeurs entières les plus générales de x et y qui rendent entière la fonction $\frac{xy}{x+y}$?

277. Quelle est la courbe image d'une ligne droite vue à travers un prisme de cristal disposé d'une manière qcq. par rapport à cette droite, en faisant d'ailleurs abstraction de la dispersion ?

278. Quelle est la courbe image d'une ligne droite entièrement plongée dans l'eau et vue hors de l'eau ?

279. Quel est le point du plan de 4 cercles dont les polaires relatives à ces cercles se coupent toutes quatre au même point ? et quel est ce dernier point ?

280. Quelle est sur le plan de 4 cercles la droite dont les pôles relatifs à ces cercles sont tous quatre sur une même ligne droite ? et quelle est cette dernière droite ?

281. Lieu des points dont les polaires relatives à trois cercles se coupent en un même point : et lieu des de l'intersection de ces polaires.

282. Enveloppe des droites dont les pôles relatifs à trois cercles sont tous 3 sur une même droite; et envelop-pe de cette dernière droite.

283. On écrit la suite des nombres

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 ...

Quel est le $n^{ième}$ chiffre?

284. Si, considérant successivt. deux à deux trois cercles tracés sur un même plan, on détermine, pour chaque système de deux cercles, les c. de sim. tant int. qu'ext. et que dans chaque système on fasse de la distance entre ces deux centres le diamètre d'un nouveau cercle; les trois cercles ainsi obtenus passent par les deux mêmes points. Résolu, 1535.

Théorème analogue pour 4 sphères, qui en déterminent 6 autres passant par les deux mêmes points.

285. Un cercle étant donné, dans un plan horizontal, 1°. si l'on coupe un cône droit dont ce cercle soit la base, par une suite de plans parallèles et verticaux, les sections résultantes seront des hyperboles qui auront leurs asymptotes parallèles. 2°. Trouver sur la verticale élevée par le centre du cercle le point où il faut placer le sommet pour que les hyperboles dont il s'agit soient équilatères. (concours général de 1820).

Facile par la Géométrie. Il faut que l'angle au sommet du cône soit droit.

286. Trouver les éléments d'une conique dont on connaît seulement. un arc qui ne contient aucun sommet.

287. Quelle est la courbe plane telle que, si un angle donné se meut sur son plan de manière à lui être toujours circonscrit, ses côtés formeront avec la corde de contact un triangle touj. semblable à un triangle donné?

Problème analogue dans l'espace.

288. Deux lignes du second ordre étant tracées sur un

même plan, on demande 1°. le lieu des pôles des tangentes à l'une, déterminés par rapport à l'autre ; 2°. l'enveloppe des polaires de tous les points de l'une d'elles par rapport à l'autre.

Problèmes semblables dans l'Espace.

facile. 289. De tous les systèmes de diamètres conjugués d'une ellipse, les diamètres principaux sont ceux dont la somme est un minimum ; et les diam. conj. égaux, ceux dont la somme est maxima. — Id. pour l'ellipsoïde.

290. La droite qui va du sommet de l'angle circonscrit à une section conique au centre de cette courbe divise la corde de contact en deux parties égales. (facile).

La droite qui va du sommet du cône circonscrit à une surface du second ordre au centre de cette surface, passe par le centre de la ligne de contact.

(x) 291. Quelle est la somme de la série

$$1 + \frac{a\cos\theta}{1} + \frac{a^2\cos 2\theta}{2!} + \frac{a^3\cos 3\theta}{3!} + \cdots \; ?$$

(x) 292. La circonférence qui passe par les centres de trois qcq. des 4 cercles qui touchent à la fois les trois côtés d'un triangle qcq. est double de celle qui passe par les trois sommets de ce triangle.

293. Courbe du chien qui nage vers son maître lequel marche sur le bord d'un canal, opposé à celui d'où le chien s'est élancé.

294. Deux ~~asymptotes~~ hyperboles équilatères qcq. tellemt. disposées l'une par rapport à l'autre que les diamètres principaux de chacune sont les asymptotes de l'autre, se coupent toujours à angle droit.

295. Le point O d'un plan dont la somme OA + OB + OC des distances à 3 points fixes, est un minimum, — est

tel que si, par l'une quelq. des droites OA, OB, OC, on conduit un plan perp. au plan en question, ce plan bissectera l'angle des deux autres droites.

296. Enveloppe d'un des côtés d'un angle droit dont le sommet décrit une Ellipse, tandis que l'autre côté passe constamt. par le centre de l'Ellipse.

297. Deux angles donnés, égaux ou non, se meuvent: leurs sommets sont fixes, et un côté de l'un coupe touj. un côté de l'autre sur une droite donnée. Lieu des intersections des deux autres côtés.

298. Quelle est la ligne de chacun des points de laquelle menant des droites à deux points fixes, ces droites interceptent toujours des segments de même longueur sur une droite donnée. (2e degré)

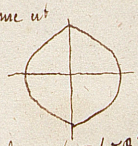
299. Une Ellipse et une hyperbole qui ont même centre et mêmes foyers se coupent à angle droit. } facile.

300. Soit menée, sur un plan, une ligne droite d'une longueur égale à celle de la moitié de l'un des méridiens d'une sphère, pris d'un pôle à l'autre; et concevons que, par chacun des points de cette droite on lui élève une perpendiculaire égale en longueur au parallèle passant par le point correspondant du demi-méridien, de manière que toutes ces perp. aient leurs milieux sur la 1re droite. Les extr. de ces perp. formeront une courbe fermée ayt. un centre et deux diamètres principaux. On demande la nature de cette courbe, et son aire.

Cette droite étant l'axe des y, l'Eq. est

$x = \pm \pi R \cos \frac{y}{R}$

La forme est



La surface est $4\pi R^2$.

301. On sait que, dans tout tétraèdre, l'aire de chacune des faces est la somme des produits des aires des trois autres par les cosinus tabulaires des angles qu'elles font avec celle-là: ce qui donne entre les aires des 4 faces d'un tétraèdre et ses six angles dièdres 4 Eq.

entre lesquelles on peut éliminer les aires des faces, qui n'y entrent que par leurs Rapports. — Il y a donc une Relation nécessaire entre les Cos. tabulaires des six Dièdres d'un Tétraèdre, et conséquemment il doit aussi exister une Relation entre ces angles eux-mêmes. — on propose de chercher cette Relation.

facile. 302. — Si sur le Grand axe d'une demi Ellipse, pris pour petit axe, et du même côté, on décrit une autre demi-Ellipse semblable à la première et qu'on leur mène ensuite une ordonnée commune les coupant en deux points : la droite menée du centre à l'un de ces points sera perp. à la Tg. menée par l'autre.

(x) 303. Les milieux des cordes interceptées par une conique sur des droites issues d'un même point sont sur une autre conique homothétique de la 1ère et passant par le point. — Id. pour une Surf. du 2d. ordre.

304. Enveloppe des Bissectrices d'un angle circ. à une conique, et dont le Sommet se meut sur une droite.

Théorèmes et Problèmes divers.

305. — Théorème. — Étant donné un cercle et une droite, on peut trouver un point A tel que, MP étant la perp. abaissée d'un point qcq. de la circonférence sur la ~~cercle~~ droite, on ait

$$\overline{AM}^2 = K.MP$$

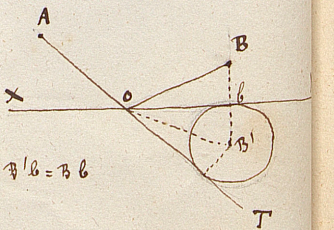
K étant une quantité constante (Stewart, proposit. VI).

On peut inversemt. étant donné le point A et le cercle, chercher la droite : c'est même à peu-près ainsi que Stewart présente l'énoncé de sa proposition. Il donne la construction que voici : — Mener un diamètre par le point donné A, et sur ce diam. déterminer le point B qui appartient à la polaire de A : la perp. élevée sur le milieu de AB sera la droite demandée. — K est le double de la distance de A au centre du cercle.

306. Th. — Étant donné un cercle et deux points A, B, on peut trouver un 3e. point C tel que, menant par ce dernier une droite qcq. qui rencontre la circonf. en D, E, on ~~ait~~ aura toujours

$$\frac{AD.BD}{AE.BE} = \frac{CD}{CE}$$ (Stew. prop. IX).

307. Aller de A en B en touchant XY et de façon que angle $AOX = 2BOY$.



On connaît B'. On prolonge AO. B' est sur la bissectrice de YOT. D'où la construction.

308. Si par un point d'une ellipse ou d'une hyperbole, on mène une tg. et une normale, si l'on joint l'un des foyers à ce point, et que par le centre on mène une parallèle à cette droite, la partie de cette paral.

-lèle comprise entre la normale et la tangente sera égale à l'autre rayon vecteur de ce point. (très-facile.)

309. La circonférence décrite sur la portion du petit axe comprise entre la normale et la tangente menées en un point d'une Ellipse passe par les foyers. — id. pour l'Hyperbole. — (facile).

310. Le cylindre circonscrit à une sphère est moyen proportionnel entre la sphère et le cône équilatéral circonscrit, tant pour les surfaces totales que pour les volumes. (connu et facile).

311. Sur les cercles osculateurs des coniques.

Par tout point d'une conique passent 4 cercles osculateurs : les 4 points d'osculation sont sur une même circonférence. (Steiner).

I. Lemme. Soient

$$Ay^2+Cx^2+Dy+Ex+F=0 \qquad Ay^2-Cx^2+D'y+E'x+F'=0$$

les éq. de deux coniques : les axes coordonnés étant parallèles aux axes principaux, les points d'intersection des deux coniques sont sur une même circonférence.

Démonstration. — Les deux éq. donnent celles-ci :

$$\begin{cases} 2Cx^2+y(D-D')+x(E-E')+F-F'=0 \\ 2Ay^2+y(D+D')+x(E+E')+F+F'=0 \end{cases}$$

d'où

$$2ACy^2+2ACx^2+y\{D(A+C)+D'(C-A)\}+x\{E(A+C)+E'(C-A)\} + F(A+C)+F'(C-A)=0$$

éq. d'un cercle.

Observation. Si $C=0$ le cercle devient une droite.

id. Le lemme renferme cet énoncé géométrique. Lorsqu'une Hyperbole et une Ellipse ont leurs axes principaux parallèles, les points d'intersection sont sur une même circonférence.

II. Soit $Ay^2+Cx^2+Dy+Ex=0$ l'éq. d'une conique, les axes coord. parall. aux axes princip. et soient $x'y'$

les coord. d'un point d'osculat. d'un cercle qui passent par l'origine : la droite qui passe par le point et l'origine a pour Eq. $yx' = xy'$, et la Tg. en ce point a pour Eq.

$$y(2Ay'+D) + x(2Cx'+E) + Dy' + Ex' + 2F = 0$$

ces deux droites sont Egalemt. inclinées sur les axes principaux : donc

$$\frac{2Cx'+E}{2Ay'+D} = \frac{y'}{x'} \quad \text{d'où} \quad 2Ay'^2 - 2Cx'^2 + Dy' - Ex' = 0$$

et l'on a aussi

$$2Ay'^2 + 2Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' = 0$$

donc, d'après le Lemme, les 4 points sont sur une même circonférence.

312. Soit, dans le plan d'une Ellipse donnée, une droite qcq. TS. Par le centre C de l'Ellipse on mène le diam. ACB conjugué à la direction de cette droite, et qui va la couper en O : on prolonge ensuite OC d'une longueur OM telle que $OC \cdot CM = \overline{CA}^2$. On suppose que la droite TS reste toujours Tgte à une courbe donnée, et l'on demande le lieu des points M.

313. Aire de la Sinussoïde. — Soit $y = \sin x$ l'Eq. donnée. Cherchons l'aire comprise entre y_1 et y_2 correspondantes aux abscisses x_1, x_2. Divisons $x_2 - x_1$ en $n+1$ parties égales et faisons $x_2 - x_1 = (n+1)h$. L'aire cherchée est la Limite de

$$h\{\sin x_1 + \sin(x_1+h) + \sin(x_1+2h) + \cdots + \sin(x_1+nh)\}$$

ou

$$\frac{h \sin.\left(x_1 + \frac{nh}{2}\right) \sin \frac{h}{2}(n+1)}{\sin \frac{h}{2}}$$

or $\frac{nh}{2} = \frac{x_2 - x_1 - h}{2}$. Substituant, et faisant $h = 0$ et $\frac{h}{\sin \frac{h}{2}} = 2$, il vient $2 \sin \frac{1}{2}(x_2 + x_1) \sin \frac{1}{2}(x_2 - x_1)$: et lorsque $x_1 = 0$, l'aire devient $1 - \cos x_2$. —

314. Théorème. — Soient n points de l'Espace. Qu'on prenne le centre de moyenne distance de n-1 de ces points ; on peut faire cette opération n fois ; on aura ainsi n nouveaux points dont le C. des M. D. est le même que celui des n points donnés.

Soient en effet $x_p\ y_p\ z_p$ les coord. d'un des points : donnant à p successiv^t. les valeurs 1, 2 .. n, on aura les 3n coord. des n points. Les coordonnées du centre de m. d. sont $\frac{\Sigma x_p}{n}$, $\frac{\Sigma y_p}{n}$, $\frac{\Sigma z_p}{n}$, ou $\frac{X}{n}$, $\frac{Y}{n}$, $\frac{Z}{n}$. Séparant le point $(x_1\ y_1\ z_1)$, le c. de m. d. des n-1 autres a pour coordonnées

$\frac{X-x_1}{n-1}$, $\frac{Y-y_1}{n-1}$, $\frac{Z-z_1}{n-1}$: d'où il résulte que le c. de m. d. des n nouveaux points a pour coordonnées

$$\frac{(n-1)X}{n(n-1)} = \frac{X}{n}, \frac{Y}{n}, \frac{Z}{n} \quad \text{cqfd.}$$

Corollaire : En opérant sur les nouveaux points comme sur les premiers, et ainsi de suite, le C. des m. d. des points donnés est le point limite.

315. Soient donnés dans le plan d'un cercle deux droites parallèles L et L'. Par un point M pris sur l'une, on mène deux tangentes au cercle qui déterminent sur l'autre un segment AB : on joint le point M au point I, milieu de ce segment, et l'on demande de démontrer que toutes les droites, telles que MI, vont concourir en un même point. —

316. D'un point A on mène deux tgtes AM et AN à une coniques. Si R et R' sont les rayons de courbure en M et N, on a

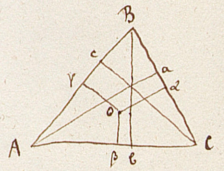
$$\frac{AM}{AN} = \frac{\sqrt[3]{R}}{\sqrt[3]{R'}}$$

ou encore, n et n' étant les normales

$$\frac{AM}{AN} = \frac{n}{n'} \quad \text{(Liouville).}$$

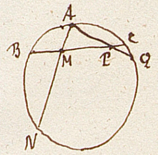
317. Le cercle circonscrit à un triangle équilatéral est le lieu des points tels que la distance d'un de ces points à l'un des sommets du triangle est égale à la somme de ses distances aux deux autres sommets. Résolu, 46.

318. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point tel que, si on le joint aux trois sommets, le triangle soit décomposé en trois autres équivalents.



On détermine aisément ce point o par la condition que $o\alpha = \frac{1}{3} Aa$, $o\beta = \frac{1}{3} Bb$, $o\gamma = \frac{1}{3} Cc$.

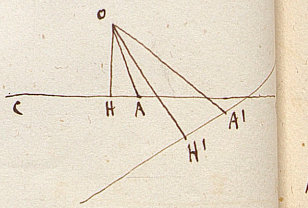
319. Si par le milieu A de l'arc BC on mène AN et AQ qcq., M N P Q sont sur une même circonférence.



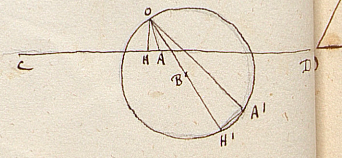
320. Un cercle étant donné, on décrit une circonférence qui ait pour diamètre le rayon du 1er cercle. Si dans le grand cercle on mène différentes cordes par le point de contact des deux circonférences, le lieu des milieux de ces cordes est la circonf. du petit cercle. (connu)

321. Par deux points donnés sur une circonférence, on mène des couples de cordes parallèles, et l'on joint leurs extrémités diagonalement. Le lieu des intersections des diagonales est une circ. qui passe par les deux points donnés et le centre du 1er cercle. (facile).

322. On donne CD et O. On mène OA qcq. puis OA', tel que AOA' = angle donné α, et que $\frac{OA'}{OA} = K$. Le lieu des points A' est évidemt. une droite.



323. Mêmes données, sauf qu'on doit avoir $OA \cdot OA' = m^2$. — Le lieu des points A' est une circonférence, comme il est aisé de le voir.



324. Les deux mêmes problèmes, la droite CD

étant remplacés par une circonférence. — Le lieu A' est alors toujours une circonférence.

325. Un escalier est tel que si l'on en monte les marches 2 à 2, il en reste 1 ; si on les monte 3 à 3 il en reste 2 ; 4 à 4, il en reste 3, ... n à n il en reste n−1. On demande quel est le plus petit nombre de marches que puisse avoir l'escalier.

Ajoutons une unité au nombre des marches : le nombre ainsi obtenu sera divisible à la fois par tous les nombres depuis 1 jusqu'à n, et, comme il doit être le plus petit possible, ce doit être leur plus petit multiple. Donc, pour avoir le nombre des marches de l'escalier, on prendra le plus petit multiple de tous les nombres depuis 1 jusqu'à n, et l'on en retranchera une unité.

326. Trouver la somme de la série

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} + \cdots$$

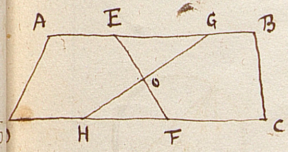
Soit S cette somme. On peut écrire

$$S = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \cdots + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \frac{3}{x^4} + \cdots$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = \frac{1}{x-1} + \frac{S}{x}$$

$$S = \frac{x}{(x-1)^2}.$$

327. Toutes les droites qui, aboutissant aux deux bases d'un trapèze, le divisent en deux parties équivalentes, se coupent en un même point.



Soit ABCD un trapèze, EF, GH deux droites dont chacune le divise effectivement en deux parties équivalentes. Il en résulte que les deux triangles EOG, FOH sont équivalents. Mais ils sont semblables. Donc ils sont égaux. Donc toutes les droites EF, GH se coupent en leurs milieux ; donc...

328. Si dans un triangle on mène les médianes, et par les sommets des parallèles aux médianes, on forme un nouveau triangle dans lequel les côtés sont doubles des médianes de l'autre.

329. Courbes à construire (Collège Rollin).

$y = \sin x$

$y = \cos x$

$y = \log x$

$y = \operatorname{tg} x$

$y = \frac{2x-1}{x^2+1}$

$y = \frac{x+1}{x^2+1}$

$y^2 = \frac{x^2-x}{1+x}$

$y = \frac{2-x}{x^2 \pm 1}$

$y = \frac{1}{x^2-x+1}$

$y = \frac{2x-x^2}{x^2-1}$

$y = \frac{1-x^3}{x^2}$

$y = x^3 - 1$

$(y-1)x^2 + x - 2 = 0$

$y^2 x = 1 - x^3$

$y = x \pm x\sqrt{x}$

$y = \pm (x-2)\sqrt{x-1}$

$y^2(1-x^2) = x^3$

$y^2(1-x^2) = x^2$

$y = x+1 \pm \sqrt{\frac{x}{1-x^2}}$

$y = x^2 \pm \sqrt{\frac{1}{1-x}}$

$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^2-2x+2}{4x-x^2}}$

$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^3-5x+4}{x-2}}$

$y = \sqrt{\frac{x^3-24x+8}{x^3-2x^2-4x+8}}$

$y^2 = \frac{x^4}{1-2x}$

$x^2y + y^2x = 1$

$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^3-6x+4}$

$y = x \cot \frac{\pi x}{2a}$

$y = \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

$y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$

$y^2 = \frac{1}{x \pm 1}$

$y = \frac{1}{1 \pm x^2}$

$y = \frac{x}{x^2-1}$

$y = \frac{1}{x^2-x}$

$y^2 = \frac{x}{1+x}$

$y(x^2+1) = x^2 - 1$

$y = x \pm \sqrt{5x^2-6x+x^3}$

$xy^2 - 2xy + 4y + x^3 = 0$

$y = -1 + \frac{2x-1}{x^2-1}$

$y = x - 1 + \frac{x}{x^2 \pm 1}$

$y = x - 1 \pm \sqrt{1-x^2}$

$y^2 = \frac{1}{x^2 \pm 1}$

$y^2 = \frac{1}{x^2-x}$

$y^2 = \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\pm 1}$

$y^3 = \frac{x^2+1}{x}$

$y^2 = \frac{x}{x^2+1}$

$y = \frac{2-x}{1+x^3}$

$y = \frac{3x-1}{x^3}$

$y = \pm\sqrt{x} \pm \sqrt{1-x}$

$y = x \pm \sqrt{x^4+4x}$

$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^2-x^3}$

$y = x^2 \pm \sqrt{x^3-4x}$

$y = x^2 - 1 \pm \sqrt{x^4-1}$

$y = \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$

$y = x \pm \sqrt{x^2-1}$

$y^2 = x^2 + \frac{1}{x(x-1)}$

$y = \frac{1}{x+1} \pm \sqrt{x^2-1}$

$y^2 = x^4 + x$

$y = \pm x\sqrt{\frac{1}{x^2-x}}$

$y = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$

$y = x^2 \pm \frac{1}{x^2}$

$y = \frac{x^3-1}{x^3+1}$

$y^2 = \frac{1}{1-x^3}$

$y = x \pm \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$

$y = \frac{1}{x} \pm \sqrt{\frac{1}{x^2-1}}$

$y = x \pm \sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}}$

$a = \log \sqrt{\frac{(x+c)^2+y^2}{(x-c)^2+y^2}}$

$b = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-c} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x+c}$

$y^3 + x^3 = a^3$

$y^4 + x^4 = a^4$

$y = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$

$e^{-ay} = \cos ax$

$y^3 + yx^2 - \lambda y^2 + \lambda x^2 - l^2 y + l^2 \lambda = 0$

$\rho = \frac{2a}{\omega} \sin \omega$

$\rho = a \cos 3\omega$

$\rho = \sqrt{1 - 2\sin^2 \omega}$

$\rho = \sqrt{1 - 2\sin \omega}$

$\rho = \cos\omega \pm \sqrt{\cos^2\omega - 2\sin\omega}$

$\rho^2 = \frac{1}{\sin 2\omega}$

$\rho = \frac{2}{1+2\sin\omega}$

$\rho = \frac{1}{1+\sin\omega-\cos\omega}$

$\rho = 2\sin\omega - \cos\omega$

$\rho = \frac{1}{3\operatorname{tg}\omega}$

$\rho = \frac{2}{1 \pm \operatorname{tg}\omega}$

$\rho = \frac{1}{\operatorname{tg}\omega - 1}$

$\rho^2 = \frac{1}{\sin^2\omega}$

$\rho = 1 + 2\cos\omega$

$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{\cos\omega}$

$\rho = \frac{1}{3\sin\omega - 2\cos\omega}$

$\rho = \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega}$

$\rho = \frac{a^2\cos\omega}{a+c\cos\omega}$

$3\rho^2 - 2(8+3\cos\omega)\rho + 15 = 0$

$\rho = \frac{\operatorname{tg}\omega}{1+\sin\omega}$

$\rho^2 - 2\rho\cos\omega + \sin\omega = 0$

$\rho = 2\sin\omega + 3\cos\omega$

$\rho = \frac{3}{2+\operatorname{tg}\omega}$

$\rho^2 = \frac{1}{\operatorname{tg}\omega - 1}$

$\rho = \frac{\sin\omega}{\cos\omega - \operatorname{tg}\omega}$

$\left.\begin{array}{l} \rho = \frac{\cos\omega - \sin\omega}{(\cos\omega + \sin\omega)^2} \\ \rho = \frac{\cos(\omega+45)}{\sqrt[3]{2}\cos^2(\omega-45)} \end{array}\right\}$

$\rho = -\operatorname{cotg} \frac{3}{2}\omega$

$\rho = \frac{l}{4}\sin^2\omega$

$\rho = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+2l\sin\omega}$

$\rho = \sin\omega + 2\cos\omega$

$\rho = \frac{1}{3\operatorname{tg}\omega}$

$\rho = \operatorname{tg}\omega$

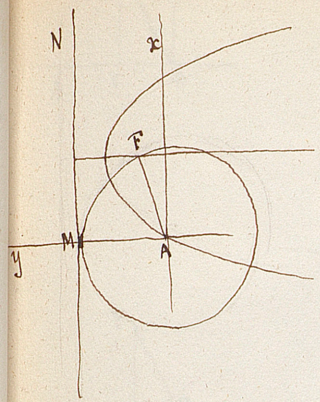
$\rho = 1 + 2\cos\omega$

$\rho = (\sin\omega + \cos\omega)^{\pm 1}$

$\rho = \frac{1}{\cos^2\omega}$

$\rho = \frac{1}{\cos^3\omega - \sin^3\omega}$

$\rho^2 = a^2 + b^2\cos 2\omega$



330. Lieu des foyers des paraboles qui passent par un point fixe et ont même directrice (Paraboles du canon).

Soit A le point fixe, et MN la directrice commune, F le foyer d'une des paraboles. On doit toujours avoir FA = MA: donc les foyers se trouvent nécessairem^t. sur un cercle décrit du point A comme centre avec AM pour rayon.

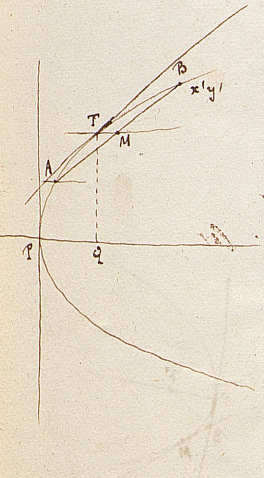
331. Lieu des sommets de ces mêmes paraboles. _ Les foyers étant tous situés sur un cercle, et le sommet étant au milieu de la perp. abaissée du foyer sur la directrice, le lieu des sommets est le lieu des milieux des distances de chacun des points du cercle à la directrice. _

Je prends pour axes .... (fig.) L'Eq. du cercle sera $y^2+x^2=R^2$, et ~~et~~ celle de la directrice $y=R$. Soient x' y' les coord. d'un point du lieu, et x y le point du cercle situé sur la même droite. On a $x'=x$ et $y'=\frac{y+R}{2}$ delà $y=2y'-R$, et, ~~et~~ en substituant ces valeurs de x et y il vient

$$(2y'-R)^2+x'^2=R^2 \qquad 4y'^2+x'^2-4Ry'=0$$

eq. d'une ellipse passant par A et M.

332. Lieu des milieux des cordes de la parabole qui retranchent un segment constant.



L'expression du segm^t. ATMB, la parabole étant rapportée au diamètre TM et à la tg^{te} parallèle à la corde à l'extrémité du diam. est $\frac{4}{3}x'y'\sin A$: donc

$$\frac{4}{3}x'y'\sin A=K^2$$

or l'inclinaison de la tangente étant $\frac{p}{y}$, on a

$$\sin A=\frac{p}{\sqrt{y^2+p^2}} \quad \text{donc} \quad \frac{4}{3}x'y'\frac{p}{\sqrt{y^2+p^2}}=k^2$$

on aura l'Eq. de la courbe en remplaçant x' y' par leurs valeurs en fonction de ~~xy~~ x et y, coordonnées de M par rapport à l'axe PQ et la tg^{te} au sommet. Or l'eq. de la courbe avec les premiers axes est identique en posant

$$y'^2=2p'x'$$

or on sait que, a étant l'abscisse PQ de l'origine T, on a

$$2p' = 4\left(a + \frac{p}{2}\right)$$

on aura aussi $x' = x - a$

et identiquement. $y^2 = 2pa$

d'où l'on tire $a = y^2 \cdot \frac{1}{2p}$

l'expression de $2p'$ devient donc

$$2p' = 4\left(\frac{y^2}{2p} + \frac{p}{2}\right) = 4 \cdot \frac{y^2+p^2}{2p}$$

et $x' = x - a$ devient

$$x' = x - \frac{y^2}{2p}$$

Substituant dans $y' = \sqrt{2p'x'}$ il vient

$$y' = \sqrt{\frac{4(y^2+p^2)\left(x - \frac{y^2}{2p}\right)}{2p}} \qquad x'y' = \frac{1}{p}\sqrt{(y^2+p^2)(2px-y^2)} \cdot \frac{2px-y^2}{2p}$$

$$\frac{4}{3}x'y'\sin A = \frac{4}{3p}\sqrt{(y^2+p^2)(2px-y^2)} \cdot \frac{2px-y^2}{2p} \cdot \frac{p}{\sqrt{y^2+p^2}} = K^2$$

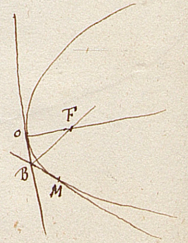
d'où

$$y^2 = 2px - \sqrt[3]{\frac{9p^2K^4}{4}}$$

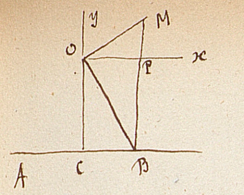
éq. d'une parabole toute semblable à la proposée, si ce n'est que le sommet s'est transporté à une distance $\sqrt[3]{\frac{9p^2K^2}{4}}$. — La corde AB est tgte à cette courbe en M, car elle n'est autre que la tgte T transportée parallèlement avec la courbe.

Pour l'ellipse, le calcul ne peut se faire aussi simplement, car on n'a pas d'expression du segment elliptique. Mais il est facile de voir que le lieu des milieux des cordes est aussi une ellipse semblable à la 1ère et ayant même centre. En effet, supposez l'ellipse projetée suivant un cercle: les segments circulaires seront aussi constants. Donc ...

333. Lieu des foyers des paraboles qui ont même sommet et même tangente.



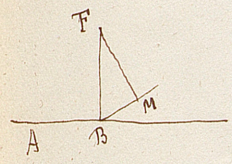
Soit O le sommet et BM la tgte; F le foyer d'une des paraboles; BF, menée du foyer à l'intersection de la tgte avec la tgte au sommet, est perp. à MB. On voit donc que le lieu revient à celui-ci:



on donne un point o et une droite fixe AB : du point on mène des obliques OB à la droite : du point B on élève une perp. on mène OM perp. à OB, et l'on demande le lieu de M.

Si $b = OC = PB$: $\overline{OP}^2$ ou $x^2 = MP \cdot PB = by$ $x^2 = by$ eq. d'une parabole rapportée à ses axes et à son sommet.

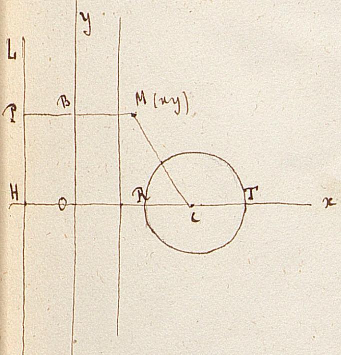
332. Lieu des sommets des paraboles qui ont même foyer et même Tgte.



Ce problème revient à celui-ci : on donne un point F et une droite AB : on mène BF perp. sur AB : de B, une oblique qcq. BM et FM perp. sur BM. Le lieu de M est évidemt. un cercle.

335. Développée de la parabole. $y^2 = \frac{8}{27p}(x-p)^3$

336. Lieu des centres des cercles tangents à une droite et à un cercle donné.



Soit oy la ligne donnée, et C le cercle donné, dont le centre est sur l'axe des x. - M un point du lieu.

Il suffit d'exprimer analytiquemt. les conditions de tangence d'un cercle avec une droite et un autre cercle : ce qui donnera deux équations entre lesquelles on éliminera le rayon variable du cercle tangent.

Il faut remarquer que le cercle donné pouvant être tangent à l'autre intérieuremt. ou extérieuremt. il faudra considérer ces deux cas dans l'expression de la distance des centres.

Soit $oc = a$. La distance MC, les cercles étant tangents extérieurement, doit être égale à la somme des rayons R et r : r étant celui du cercle fixe. on doit donc avoir

$$(x-a)^2 + y^2 = (R+r)^2$$

Si les cercles sont Tgts intér.t on aurait

$$(x-a)^2 + y^2 = (R-r)^2$$

donc en général

$$(x-a)^2 + y^2 = (R \pm r)^2$$

en outre le cercle est tgt. à la droite. Donc

$$x = R.$$

J'élimine R, et il vient, en développant et réduisant

$$y^2 = 2x(a \pm r) + r^2 - a^2$$

Eq. de deux paraboles.

ox est l'axe de ces paraboles.

L'abscisse du sommet est

$$x_0 = \frac{a^2 - r^2}{2(a \pm r)} = \frac{a \mp r}{2}$$

Donc, lorsque les cercles sont extérieurs, le sommet de la parabole est au milieu de oR ; dans l'autre cas, il est au milieu de oT.

Si l'on rapporte les paraboles à leur sommet, on voit que C est leur foyer.

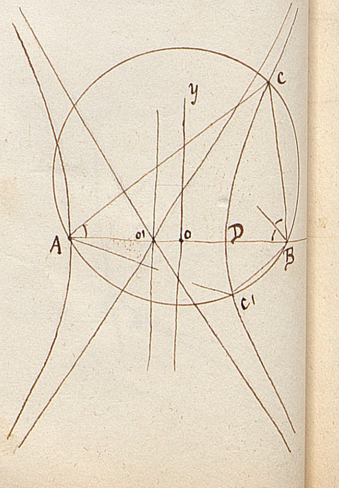
En même temps on voit que, pour trouver les directrices des deux courbes, il faut prendre des deux côtés de l'axe des y une parallèle qui en soit distante de r.

On pouvait prévoir que le lieu est une parabole, et marquer la position de la directrice. Car, d'après l'énoncé, la différence des distances MC et MB doit être constamment égale à r. Si donc on menait en H, Ho étant égal à r, une parallèle HL à oy, la distance MP devrait être toujours égale à MC. Le lieu est donc une parabole dont HL est la directrice et C le foyer.

337. Lieu des points C tels que l'angle B = 2A.

o milieu de AB. oA = oB = a. axes ox et oy.

C (x y). L'inclinaison de la droite AC, ou la tgte de l'angle CAB est $\frac{y}{x+a}$ et la tgte de l'angle CBA est $-\frac{y}{x-a}$ ou $\frac{y}{a-x}$. or B = 2A. donc



$$\frac{y}{a-x} = \frac{\left(\frac{2y}{a+x}\right)}{\left(1 - \frac{y^2}{(a+x)^2}\right)} = \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - y^2}$$

d'où

$$y^2 - 3x^2 - 2ax + a^2 = 0$$

Eq. d'une hyperbole.

Si l'on pose $y=0$, on aura les sommets : on trouve

$$x = \frac{a}{3} \quad \text{et} \quad x = -a.$$

ainsi l'un des sommets est en A, l'autre en D, tiers de $OB = a$. Le centre a donc pour abscisse $-\frac{a}{3}$, ou la $\frac{1}{2}$ somme des abscisses des sommets.

Rapportons la courbe à son centre et à ses axes : on aura

$$y^2 - 3x^2 + \frac{4}{3}a^2 = 0$$

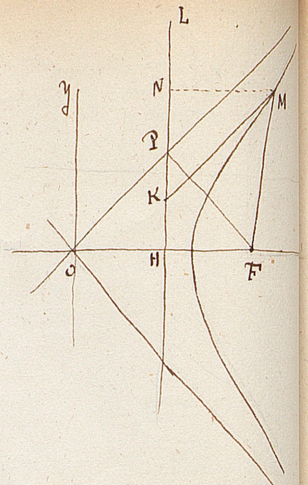
on trouve l'Eq. des asymptotes en négligeant la constante, ce qui donne $y^2 = 3x^2$, $y = \pm x\sqrt{3}$. or $\sqrt{3} = \operatorname{tg} 60°$. donc les asymptotes font avec l'axe des x un angle de 60° et un angle de 120°. — on peut donc construire la courbe.

Le point B est un foyer. Car la longueur du demi-second axe est $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, et celle de l'axe transverse $\frac{2a}{3}$: donc l'excentricité c est $\sqrt{\frac{4a^2}{9} + \frac{4a^2}{3}} = \frac{4a}{3}$, c.à.d. la longueur O'B.

Rem. I. Ce problème peut servir à partager un angle en 3 parties égales. En effet, circonscrivons un cercle au triangle ABC. Dans le triangle ABC', l'angle BAC' est moitié de l'angle ABC', puisque le point C' est sur l'hyperbole : donc l'arc BC' est moitié de l'arc AC', ou le 1/3 de l'arc AC'B : or cet arc est la mesure de l'angle C. Donc en joignant CC', l'angle formé sera le tiers de C.

Rem. II. On ne voit pas d'abord quelle peut être l'origine de la seconde branche : mais il faut remarquer que si dans l'Eq. primitive $\frac{y}{a-x} = \frac{2y(a+x)}{(a+x)^2 - y^2}$ on peut changer les signes des deux membres : par conséquent le lieu trouvé est aussi celui des points tels que l'angle supplémentaire de B est double du supplémentaire de A : c'est ce qui a lieu pour les triangles dont le sommet est sur la seconde branche.

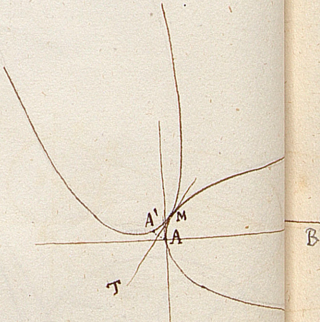
338. Soit un point M d'une hyperbole. Si l'on joint ce point au foyer F, et que l'on mène par le même point une parallèle MK à l'asymptote, cette parallèle rencontre la directrice HL en un point tel que l'on a MF = MK.



On sait que, MN étant perp. à la directrice, on a $\frac{MF}{MN} = \frac{c}{a}$. Si donc je prouve que l'on a pareillem^t. $\frac{MK}{MN} = \frac{c}{a}$, la proposition sera démontrée. Or le triangle MNK est semblable à OPF, formé en abaissant du foyer une perp. FP sur l'asymptote, perp. qui, on le sait, a son pied sur la directrice. De cette similitude des deux triangles on tire $\frac{MK}{MN} = \frac{OF}{OP} = \frac{c}{a}$: donc MK = MF.

De là, construction d'une hyperbole dont on connaît le foyer, un point et une asymptote : Par le point, on mène une parallèle à l'asymptote, et l'on joint ce point au foyer : on prend MK = MF, et l'on a un point de la directrice : on en obtient un second en abaissant FP perp. à l'asymptote. La directrice connue, on connaît le sommet, le centre, l'autre asymptote ; enfin tous les éléments de l'hyperbole.

339. Une parabole roule sur une parabole égale, en partant d'une position telle que leurs axes coïncidaient. On demande le lieu décrit par le sommet de la parabole mobile.



Soient A et A' les sommets des paraboles, et M leur point de contact. Je mène la tangente commune MT, et la ligne de jonction AA', qui est évid^t. perp. à la tgte MT. — Si je parvenais à trouver le lieu décrit par le point d'intersection de cette perp. avec la tgte, j'aurai facilem^t. le lieu décrit par le point A'. Car le point en question est le milieu de AA'.

L'éq. de la parabole étant $y^2 = 2px$, celle de la tgte est $y = mx + \frac{p}{2m}$; et celle de la perp. à la tgte, menée par l'origine, est $y = -\frac{1}{m}x$: de là $m = -\frac{x}{y}$. En

Eliminant m dans l'Eq. de la Tgte par cette Relation, on a l'Eq. du lieu des points-milieux

$$y = -\frac{x^2}{y} - \frac{py}{2x}$$

$$2xy^2 + 2x^3 + py^2 = 0$$

$$y^2 = -\frac{2x^3}{2x+p}$$

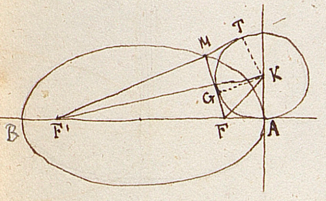
Eq. d'une cissoïde construite avec le cercle dont le diamètre est $\frac{1}{2}p$. — Pour obtenir l'Eq. du lieu des sommets, il suffit de doubler les coordonnées : par conséquent changer dans l'Eq. x en $\frac{x}{2}$ et y en $\frac{y}{2}$: on a ainsi $y^2 = -\frac{x^3}{x+p}$

cissoïde semblable à la première, et construite avec le cercle dont le diamètre est p.

340. Construire une Ellipse, connaissant un Sommet, un foyer et un point.

Il se présente deux cas : 1°. le sommet donné est sur le Grand axe ; 2°. il est sur le petit axe.

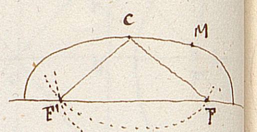
1°. La solution du problème est fondée sur ce théorème que les bissectrices des angles des rayons vecteurs avec la partie positive de l'axe des x se rencontrent en un même point sur la tgte au sommet de l'Ellipse. Admettons que les bissectrices F'K et FK des angles MF'A et MFA se rencontrent en effet sur la Tgte AK : je vais démontrer qu'alors le point M est sur l'ellipse, ou que la somme des rayons vecteurs FM et F'M est $= 2a$. En effet, ex-inscrivons le cercle AGT dont le centre est K. Il est facile de voir que l'on a $F'M + MG = FF' + FG$, et, ajoutant de part et d'autre $BF' = FA = FG$: $FM + F'M = 2a$.



Soit maintenant M le point donné ; A et F le foyer et le sommet donnés. Joignant FA, j'ai la direction du Grand-axe. J'élève AK perp. sur FA. Je joins MF, je mène la bissectrice FK de MFA. De K

comme centre avec AK pour Rayon je décris le cercle : je mène par le point M une Tgte à ce cercle : j'ai F' par l'intersection de cette Tgte et de l'axe des x. Dès lors le problème est Résolu.

2°. on donne le foyer F et le Sommet C avec le point M. — du point C avec CF pour Rayon, et du point M avec 2CF − MF pour Rayon, je décris deux arcs qui se coupent en F'. — Il y a deux solutions au problème.



341. — Lieu des projections du centre de l'Ellipse sur ses Tangentes :

$$y^4+x^4+2x^2y^2-a^2x^2-b^2y^2=0$$

342. Lieu des Sommets des hyperboles ayant même asymptote et même directrice.

Si l'on cherche d'abord à déterminer le lieu des foyers de ces hyperboles, on voit tout de suite que ce lieu se compose de deux droites menées par le point de Rencontre de la directrice avec l'asymptote : car l'axe des x conservant une direction constante toujours perp. à la directrice, et le centre de la courbe se mouvant nécessairemt. sur l'asymptote, il faut que les distances de chacun des points de l'asymptote aux deux foyers soient égales, ce qui ne peut avoir lieu que pour les deux droites en question. L'une d'elles est perp. sur l'asymptote d'après une propriété connue.

De là on conclut le lieu des Sommets. Le Rapport $\frac{c}{a}$ doit être constant : car $\frac{a}{c}$ est le cos. de l'angle de l'asymptote avec l'axe des x, angle qui reste constant. Donc nécessairemt. les Sommets se meuvent aussi sur deux droites qui aboutissent au point où la directrice Rencontre l'asymptote. Car, pour ces droites et pour elles seules, le Rapport $\frac{c}{a}$ reste constant.

Les deux droites sont à 90°. Car le cercle décrit sur

l'axe transverse comme diamètre passe au point d'intersection de l'asymptote avec la directrice.

343. Déterminer une parabole, connaissant le sommet, une tangente et le point de contact.

Je joins le point donné M au sommet. Par le point milieu, si je connaissais la direction de l'axe, je mènerais un diamètre qui couperait la tgte au sommet au même point que la tgte donnée. Si donc sur la moitié de la corde je décris un demi-cercle, je connaîtrai le point de rencontre de ce cercle avec la tgte, lequel sera un point du diamètre, dès lors connu. — Tout est fini alors.

344. Déterminer une parabole, connaissant la directrice, une tangente et le point de contact M.

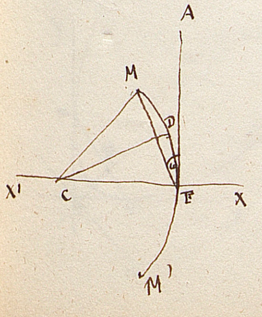
Je mène MH perp. à la directrice. Je prends MF = MH, la ligne MF faisant avec la tgte un angle égal à celui de MH avec cette tgte. J'ai le foyer F. —

345. Déterminer une parabole, connaissant le foyer et deux tangentes.

Du foyer on abaisse des perp. sur les tgtes. Les pieds de ces perp. sont sur la tgte au sommet.

346. Déterminer une parabole, connaissant une tgte, un foyer et un point de la courbe.

On joint le point au foyer : puis du point, avec le rayon vecteur pour rayon, on décrit un cercle qui doit être tgt. à la directrice. De plus, du foyer on abaisse une perp. sur la tgte : on la prolonge d'une quantité égale, on a un point de la directrice, laquelle est dès lors connue.

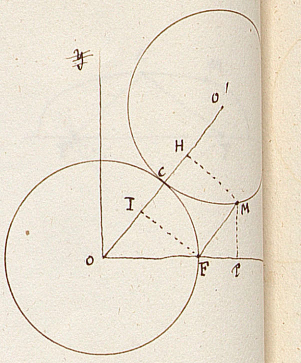


347. Par un point fixe F et d'un rayon variable on trace des arcs de cercle dont le centre se meut sur la droite X'X indéfinie. On prend sur chacun d'eux une longueur constante ~~FM~~ M'FDM = 2a. On demande

le lieu des points M et M'. $\rho = \frac{2a}{\omega} \sin\omega$.

348. Construire $\rho = \frac{1-\omega}{1+2\omega}$.

349. Déterminer le lieu décrit par un point d'une circonférence roulant sur un cercle d'un rayon égal.



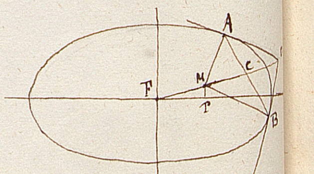
Soit M le point décrivant et F le point d'où il est parti, de sorte que CM = CF. Je prends pour pôle le point F et pour axe polaire OFX. Si des points F et M j'abaisse des perp. sur la ligne des centres OO', j'aurai, en appelant R le rayon des circonférences,

$$FM = \rho = 2(R - OI)$$

Or le triangle rectangle OIF donne, à cause du parallélisme de OO' et de FM: $OI = R\cos\omega$. Donc l'Eq. du lieu devient

$$\rho = 2R(1-\cos\omega)$$

350. Lieu des points d'où l'on peut mener à l'Ellipse deux normales à angle droit.



Soient OA, OB deux tangentes à angle droit. On sait que le lieu des points O est un cercle ayant pour Eq.

$$\alpha^2+\beta^2 = a^2+b^2$$

Je mène les normales BM et AM. Leur point de concours est sur la droite FO, qui est une diagonale du rectangle AMBO, et coupe la seconde diagonale AB en son milieu C. — Il est facile de voir que si l'on parvient à connaître les coordonnées $x'y'$ de C, on aura facilement les coord. XY de M. Car on a, d'après ce qui vient d'être dit,

$$x' = \frac{X+\alpha}{2} \qquad y' = \frac{Y+\beta}{2}$$

Or il est facile de connaître x' et y'. Car ces coordonnées sont les demi-sommes de celles des points d'intersection A, B de la corde de contact avec l'Ellipse. L'Eq.

de la corde de contact est

$$a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$$

et celle de l'Ellipse

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

or de la 1ère on tire $y = \dfrac{b^2(a^2-\alpha x)}{a^2\beta}$ d'où, en substituant dans la seconde et ordonnant

$$x^2(\alpha^2b^4 + a^2b^2\beta^2) - 2a^2b^4\alpha x + a^4b^4 - a^4b^2\beta^2 = 0$$

et les racines de cette Eq. sont les abscisses des points A et B. Leur demi-somme est donc x' et l'on a

$$x' = \frac{a^2b^2\alpha}{\alpha^2b^2+\beta^2a^2}.$$

de même

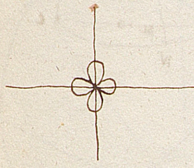
$$y' = \frac{a^2b^2\beta}{\alpha^2b^2+\beta^2a^2}$$

donc

$$\frac{X+\alpha}{2} = \frac{a^2b^2\alpha}{\alpha^2b^2+\beta^2a^2} \quad \text{et} \quad \frac{Y+\beta}{2} = \frac{a^2b^2\beta}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}$$

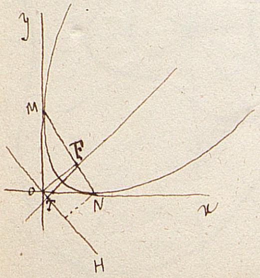
Maintenant, au lieu de tirer delà X et Y et d'éliminer α et β, je passe aux coordonnées polaires. Je pose $x = \rho \cos\omega$ $y = \rho\sin\omega$, et $\sqrt{a^2+b^2} = h$, d'où $\alpha = h\cos\omega$ et $\beta = h\sin\omega$. Substituant dans la valeur de $\frac{X+\alpha}{2}$ j'ai l'Eq. du lieu

$$\rho = \frac{2a^2b^2}{h(a^2\sin^2\omega + b^2\cos^2\omega)} - h$$

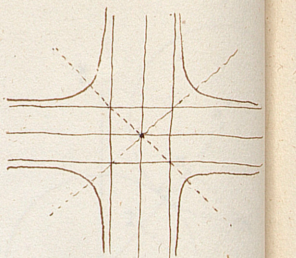


En le construisant on trouve qu'il a la forme de la fig. et que les diagonales du rectangle construit sur les axes lui sont Tgtes à l'origine.

351. Lieu des foyers d'une parabole qui roule dans un angle droit.



La parabole est Tgte aux deux axes. Donc, d'après une propriété connue, l'origine est un point de la directrice. Si donc on mène l'axe de la parabole, la perp. OH à cet axe sera la directrice, et le triangle OFT donnera $OF = FT \sin FOT$ ou $\rho = p \sin FOT$.

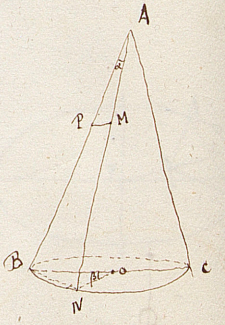


$FT = OF \sin FOT$ ou $p = \rho \sin FOT$. Or on sait que la corde des contacts passe au foyer, et est perp. à OF. Donc le triangle OFN est rect. en F. De plus la tgte est bissectrice de l'angle HNF. Donc le triangle rectangle ONH est égal au triangle OFN. Donc l'angle FOT est double de l'angle NOF qui est ici ω. Donc enfin

$$\rho = \frac{p}{\sin 2\omega}$$

Équation du lieu.

352. (Courbe du chapeau de curé). — Étant donné un cône droit dans lequel le rayon de la base est le tiers de l'apothème, prenez sur la surface de ce cône un point situé à une distance qcq. a du sommet, et de ce point comme centre, avec une ouverture de compas égale à r, tracez une courbe sur cette surface. Supposez ensuite qu'on développe cette surface sur un plan, ce qui donnera un secteur circulaire. On demande l'Éq. de la courbe tracée par le compas et devenue plane par le développement.



Soit ABC le cône droit donné, que je suppose d'abord qcq. M le point pris pour centre, MP le rayon décrivant, P un point du lieu. Je mène la génératrice AN par le point M, et je joins NO. Puis je pose

$AB = l \quad MP = r \quad AM = a \quad OB = b \quad AP = \rho$

angle $PAM = \alpha$ angle $BON = \beta$. — Le triangle APM me donne $r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho\cos\alpha$, et le triangle isocèle ABN donne $\overline{BN}^2 = 2l^2(1-\cos\alpha)$. De même le triangle isocèle BON donne pour $\overline{BN}^2$ $\overline{BN}^2 = 2b^2(1-\cos\beta)$. D'où l'on conclut

$$l^2(1-\cos\alpha) = b^2(1-\cos\beta)$$

Si l'on développe le cône, on obtient un secteur circulaire dont le centre est A et le rayon l. Appelons ω l'angle que forme alors la génératrice AB avec AN, ou l'angle du rayon vecteur AP

avec la ligne AM que je prends pour axe polaire. Les arcs étant entre eux comme leurs Rayons, on a

$$\beta : \text{arc } BN :: 1 : b$$

$$\omega : \text{arc } BN :: 1 : l$$

d'où

$$\beta b = l\omega$$

$$\beta = \frac{l\omega}{b}$$

Cette valeur de β substituée dans la dernière Egalité donne

$$l^2(1-\cos\alpha) = b^2\left(1-\cos\frac{l\omega}{b}\right)$$

d'où

$$\cos\alpha = \frac{l^2 - b^2 + b^2\cos\frac{l\omega}{b}}{l^2}$$

et la 1ère Eq. devient, par la substitution de cette valeur de $\cos\alpha$:

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - \frac{2a\rho}{l^2}\left(l^2 - b^2 + b^2\cos\frac{l\omega}{b}\right)$$

Telle est l'Eq. du lieu dans toute sa généralité. J'y introduis les conditions $a = 3$, $r = 2$, $b = \frac{1}{3}l$, et je détermine la fig. exacte de la courbe. L'Eq. devient

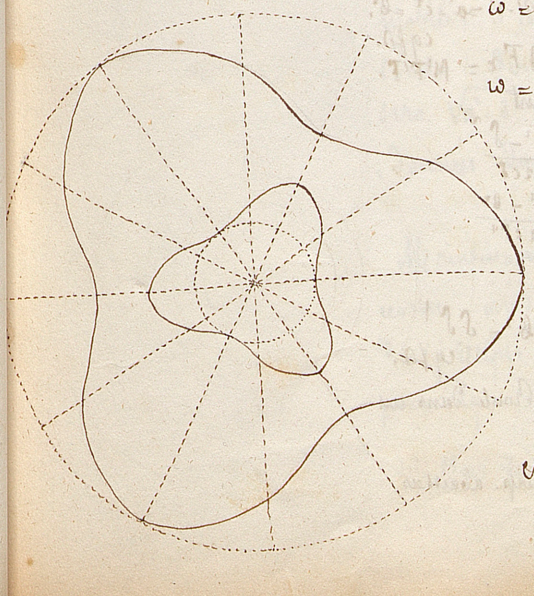
$$4 = 9 + \rho^2 - 6\rho\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9}\cos 3\omega\right)$$

$$\rho = \frac{8 + \cos 3\omega \pm \sqrt{19 + 16\cos 3\omega + \cos^2 3\omega}}{3}$$

$\omega = 0$ $\quad \rho = 1 \quad \rho = 5$

$\omega = 30°$ $\quad \rho = \frac{8 \pm \sqrt{19}}{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho > 4, < 5 \\ \rho > 1, < \frac{4}{3} \end{array} \right.$

$\omega = 60°$ $\quad \rho = \frac{7 \pm 2}{3}$ $\left\{ \begin{array}{l} \rho = 3 \\ \rho = \frac{5}{3} \end{array} \right.$



alors on a $3\omega = 180°$. au delà, le Cos. repasse dans un ordre inverse par les mêmes Etats de grandeur. Ce qui donnera la courbe figurée ci-contre.

Tgte à la courbe.

Son Eq. est

$$3\rho^2 - 2\rho(8 + \cos 3\omega) + 15 = 0$$

$$3\rho'^2 - 2\rho'(8 + \cos 3\omega') + 15 = 0$$

en Retranchant

$$3(\rho'-\rho)(\rho'+\rho) - 16(\rho'-\rho) - 2(\rho'\cos 3\omega' - \rho\cos 3\omega) = 0$$

J'ajoute et je retranche $2\rho'\cos 3\omega$. J'ai alors

$$3(\rho'-\rho)(\rho'+\rho)-16(\rho'-\rho)-2\rho'(\cos 3\omega'-\cos 3\omega)-2\cos 3\omega(\rho'-\rho)=0$$

or la différence $\cos 3\omega'-\cos 3\omega$ se transforme en $2\sin\frac{1}{2}(3\omega'+3\omega)\sin\frac{1}{2}(3\omega'-3\omega)$ de sorte qu'en divisant par $\omega'-\omega$, l'Eq. devient

$$\frac{\rho'-\rho}{\omega'-\omega}\left[3(\rho'+\rho)-16-2\cos 3\omega\right]+6\rho'\sin\frac{3}{2}(\omega'+\omega)\,\frac{\sin\frac{3}{2}(\omega'-\omega)}{\frac{3}{2}(\omega'-\omega)}=0$$

et faisant $\omega'=\omega$, il vient

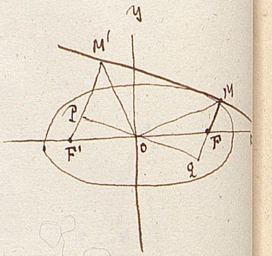
$$\frac{1}{\Theta}(6\rho-16-2\cos 3\omega)+6\rho\sin 3\omega=0$$

d'où

$$\Theta\rho=\mathrm{tg}\,V=\frac{8+\cos 3\omega-3\rho}{3\sin 3\omega}$$

Pour $\omega=0$, on a $\rho=1$ et $\rho=5$, donc $\mathrm{tg}\,V=\infty$. Donc la tgte est perp. au rayon vecteur. De même aussi lorsque $\omega=60°$, et qu'on a $\rho=3$ ou $\rho=\frac{5}{3}$ la tgte est encore perp. car $\mathrm{tg}\,V=\infty$.

353. Théorème. Le produit des perp. abaissées des foyers de l'Ellipse sur une tgte est constant et égal au carré du $\frac{1}{2}$ petit axe.



Soit $QM=PM'=p$, et $QF=PF'=z$. Nous aurons

$$FM.F'M'=(p+z)(p-z)=p^2-z^2$$

Je joins OM, $OM=a$ et $p^2=a^2-OQ^2$. $OQ^2=c^2-z^2$. Donc $p^2=a^2-c^2+z^2$. D'où $p^2-z^2=a^2-c^2=b^2$. c.q.f.d.

autre démonstration. Soit ω l'angle $MFx=M'F'F$.
Les deux triangles MOF et $M'O'F'$ donnent

$$a^2=c^2+\delta^2+2c\delta\cos\omega \qquad \cos\omega=\frac{a^2-c^2-\delta^2}{-2c\delta}=\frac{b^2-\delta^2}{2c\delta}$$

$$a^2=c^2+\delta'^2+2c\delta'\cos\omega \qquad \cos\omega=\frac{c^2-a^2+\delta'^2}{2c\delta'}=\frac{\delta'^2-b^2}{2c\delta'}$$

De là

$$(b^2-\delta^2)\delta'=\delta(\delta'^2-b^2)$$

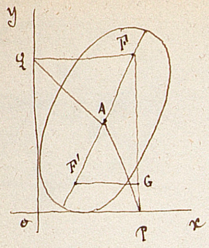
et réduisant

$$b^2(\delta+\delta')=\delta\delta'(\delta+\delta') \qquad b^2=\delta\delta'$$

c.q.f.d.

354. Lieu des foyers d'une Ellipse qui roule dans un angle droit.

1ère Solution. — On sait que le lieu des pieds des perp. abaissées



du foyer sur les tangentes est un cercle décrit sur le grand axe comme diamètre. Donc AP = AQ = a. Soit ω l'angle AFP

Triangle AFP $\quad a^2 = y^2 + c^2 - 2cy\cos\omega \quad \cos\omega = \dfrac{y^2 - b^2}{2cy}$

Triangle AFQ $\quad a^2 = x^2 + c^2 - 2cx\sin\omega \quad \sin\omega = \dfrac{x^2 - b^2}{2cx}$

$\sin^2\omega + \cos^2\omega = 1 \qquad \dfrac{(y^2 - b^2)^2}{4c^2y^2} + \dfrac{(x^2 - b^2)^2}{4c^2x^2} = 1$ Eq. du lieu.

2e. Solution. – Soient x y, x' y' les coordonnées des deux foyers. on aura, d'après un théorème connu : $yy' = b^2 \quad xx' = b^2$. Soit α l'angle FF'G.

$y' = y - 2c\sin\alpha$ donc $y^2 - 2cy\sin\alpha = b^2 \quad \sin\alpha = \dfrac{y^2 - b^2}{2cy}$

$x' = x - 2c\cos\alpha \quad$ – $\quad x^2 - 2cx\cos\alpha = b^2 \quad \cos\alpha = \dfrac{x^2 - b^2}{2cx}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ d'où l'Eq. du lieu.

3e. Solution. – Lorsque l'ellipse est rapportée à son centre, et que l'on fait tourner autour d'elle un système de deux tangentes à angle droit, le point de concours de ces tangentes décrit un cercle dont le rayon est $\sqrt{a^2+b^2}$ et qui est concentrique à l'Ellipse. – Réciproquement, si les tangentes sont fixes et l'Ellipse mobile, il est bien évident que le centre décrira un cercle, dont le centre sera en O, et dont le rayon sera $\sqrt{a^2+b^2}$. Si donc on désigne par α β les coordonnées du centre :

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2 + b^2$$

Maintenant le cercle décrit du point $\overset{A}{O}$ comme centre avec a pour rayon, dans la position actuelle de l'Ellipse, rencontre les axes en P et Q, et a pour Eq.

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = a^2$$

Si l'on fait successivement x = 0 et y = 0 il vient

$$y^2 - 2\beta y + b^2 = 0 \qquad y = FP$$
$$x^2 - 2\alpha x + b^2 = 0 \qquad x = Fq \quad \Big\} \text{ coord. du foyer}$$

D'où l'on déduit

$$\beta = \frac{y^2+b^2}{2y} \qquad \alpha = \frac{x^2+b^2}{2x}$$

d'où

$$\frac{(y^2+b^2)^2}{4y^2} + \frac{(x^2+b^2)^2}{4x^2} = a^2+b^2$$

ou

$$\frac{(y^2-b^2)^2}{4y^2} + \frac{(x^2-b^2)^2}{4x^2} = a^2-b^2 = c^2.$$

4e. Solution. Soit $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$ l'Ellipse rapportée à ses axes. Dans cette hypothèse, l'Eq. de sa tangente OP serait $y = mx - \sqrt{a^2m^2+b^2}$. Et par suite la longueur FP de la perp. abaissée du foyer F sur cette tgte a pour expression $\dfrac{-mc+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$. L'Eq. de la tgte Oq est de même $y = -\frac{1}{m}x - \sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}$ et la longueur Fq est $\dfrac{-\frac{c}{m}+\sqrt{\frac{a^2}{m^2}+b^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}$ or les longueurs sont précisément les l'x et l'y du foyer F par rapport aux axes actuels yox. Il ne s'agit donc que d'éliminer m entre les deux relations

$$y = \frac{-mc+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}} \qquad x = \frac{-c+\sqrt{a^2+b^2m^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

Il est avantageux pour l'élimination de remplacer m par sa valeur $m = -\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, α étant l'angle que fait l'axe FF' avec Ox. Il vient ainsi

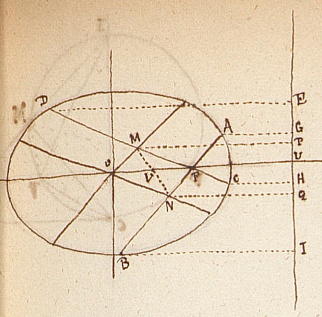
$$y = c\sin\alpha + \sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} \qquad x = c\cos\alpha + \sqrt{a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$$

Il est évident que les radicaux doivent être les coordonnées du centre A. En effet la somme de leurs carrés $= a^2+b^2$.

La 1ère élevée au carré donne $y^2 - 2cy\sin\alpha + c^2\sin^2\alpha = (a^2-b^2)\sin^2\alpha + b^2$ d'où $\sin\alpha = \frac{y^2-b^2}{2cy}$. La 2e. donne de même $\cos\alpha = \frac{x^2-b^2}{2cx}$. et faisant $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, il vient

$$\frac{(y^2-b^2)^2}{4c^2y^2} + \frac{(x^2-b^2)^2}{4c^2x^2} = 1$$

ce qui est bien l'Eq. du lieu.



355. La somme des cordes menées par un foyer de l'Ellipse parallèlement à un système de diamètres conjugués est constante.

Soit EI la directrice. $AF = AG \cdot \frac{c}{a}$

$BF = BI \cdot \frac{c}{a}$

d'où $AB = \frac{c}{a}(AG + BI)$

de même $CD = \frac{c}{a}(DE + CH)$

or $AG + BI = 2NQ$ et $DE + CH = 2MP$. Donc

$$AB + CD = \frac{2c}{a}(NQ + MP)$$

Mais OMPN étant un parallélogramme, $NQ + MP = 2VU$

$$AB + CD = \frac{4c}{a} . VU$$

or $VU = \frac{a^2}{c} - \frac{c}{2} = \frac{2a^2 - c^2}{2c} = \frac{a^2 + b^2}{2c}$. Donc

$$AB + CD = \frac{2(a^2 + b^2)}{a}.$$

La valeur de cette constante pouvait être prévue. Car si l'on prend le grand axe pour l'une des cordes ....

356. Quelle est la condition pour qu'une Ellipse et une hyperbole dont les axes ont même direction se coupent à angle droit ?

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2 \quad (1)$$

$$a'^2 y'^2 - b'^2 x'^2 = -a'^2 b'^2 \quad (2)$$

les coeff. angul. des tgtes sont

$$-\frac{b^2 x'}{a^2 y'} \qquad \frac{b'^2 x'}{a'^2 y'}$$

d'où

$$\frac{b^2 b'^2 x'^2}{a^2 a'^2 y'^2} = 1 \qquad b^2 b'^2 x'^2 = a^2 a'^2 y'^2 \quad (3)$$

Eliminons x'^2 et y'^2 entre (1), (2), (3) : il vient

$$c^2 = c'^2$$

Donc les deux courbes doivent être homofocales.

356. Soit pris un point qcq. M sur une Ellipse. Par ce point et les deux foyers F et F' on fait passer un cercle. La droite CM menée au point M par le point où le cercle rencontre l'axe des y

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

est la normale au point M.

En effet, l'arc $CF = CF'$. Cela posé, si par C on mène CG parallèle au grand axe, et si l'on joint CF, je dis que $\frac{\sin MCG}{\sin FCG} = \frac{a}{c}$. En effet

$$\sin MCG = \cos ICM \qquad \sin FCG = \cos ICF$$

or si l'on joint M et F au point I, CI étant un diamètre, les deux triangles rectangles IMC et IFC donneront

$$\cos MCI = \frac{CM}{IC} \qquad \cos ICF = \frac{FC}{IC}$$

d'où

$$\frac{\sin MCG}{\sin FCG} = \frac{CM}{CF}$$

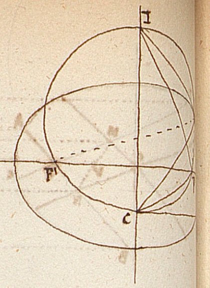
Le quadrilatère inscrit CMFF' donne, d'après un Th. connu

$$FF'.CM = (FM+F'M)CF \qquad \text{car } CF' = CF$$

$$2c.CM = 2a.CF \qquad (x)$$

$$\frac{\sin MCG}{\sin FCG} = \frac{CM}{CF} = \frac{a}{c}$$

cqfd. (Sturm)



(x) Ce n'était pas la peine de s'appeler Sturm pour inventer une démonstration pareille. — Il suffit de remarquer que, C étant le milieu de l'arc FCF', MC est bissectrice de l'angle FMF'

357. Une sécante donnée de position rencontre une infinité d'ellipses ayant mêmes foyers. Par les points d'intersection on mène deux tangentes, et l'on demande le lieu des points de rencontre.

Soient α et β les coordonnées du point de rencontre. On a les 3 éq.

$$a^2 - b^2 = c^2 \qquad y = mx + p \qquad \text{et} \quad a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$$

et les deux dernières doivent représenter la même droite :

$$m = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta} \qquad p = \frac{b^2}{\beta} \qquad a^2 - b^2 = c^2$$

il s'agit d'éliminer a et b. ce qui donne

$$\beta = -\frac{1}{m}\alpha - \frac{c^2}{p}$$

Eq. d'une droite perp. à la sécante donnée.

358. Dans une ellipse, la droite qui joint le centre au point de concours de deux tangentes passe par le milieu de la corde de contact.

Prenons pour axe des y le diamètre passant par

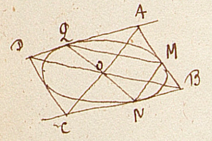
le point de concours des tangentes, et pour axe des x son conjugué. Le point d'où les tangentes sont issues étant sur l'axe des y et ayant pour ordonnée β, l'Eq. de la corde de contact sera

$$a'^2\beta y = a'^2 b'^2 \qquad \beta y = b'^2$$

éq. d'une droite parallèle aux x. Donc la corde est divisée en deux parties égales par la droite menée du centre au point de concours.

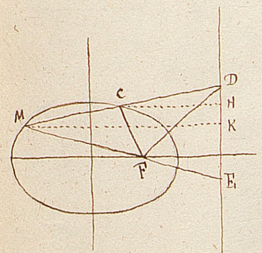
359. Les diagonales du parallélogramme circonscrit à l'ellipse forment un système de diam. conj.

1°. ces diagonales sont deux diam. cad. passent par le centre : car dans l'ellipse le centre est également distant de deux tgtes parallèles qcq.



2°. Ces diagon. sont 2 D. conj. En effet MN corde de contact de B, est partagée en deux parties égales par BD (Th. précédent). De même AC divise QM en deux parties égales. Mais QN étant un diam. QM et MN sont deux cordes supplémentaires. Donc....

360. DK est la directrice : DCM une sécante qcq. MF une droite passant par le point M et par le foyer F. on joint CE et FD. FD bissecte l'angle CFE.

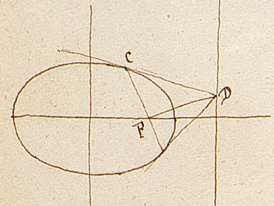


En effet on a $CF : MF :: CH : MK$

or $CH : MK :: CD : MD$

Donc $CF : MF :: CD : MD$

Donc FD est bissectrice de l'angle extérieur au triangle CFM.



Supposons que le point M se rapproche du point C jusqu'à coïncider avec lui : la sécante deviendra la tangente CD, et la propriété ne cesse pas d'avoir lieu. Mais MF et CF se confondent, et par suite forment un angle de 180°. Donc la bissectrice de cet angle, ou FD sera perp. sur CF. Donc si par un point de la directrice on mène deux tangentes, la corde de contact passe au foyer, et la droite qui va du point d'où elles sont issues au foyer est perp. sur la corde de

contact. Cette propriété s'applique également aux autres coniques. — En outre dans la parabole, les deux tangentes sont à angle droit. Dans les deux autres coniques, l'angle des tangentes n'est même pas constant.

361. Lieu des points M où vont concourir deux à deux les tangentes menées par les extrémités de deux diamètres conjugués.

L'Eq. $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$

Résolue par rapport à m, donne les directions des deux tangentes menées par un point xy. Pour que ces coordonnées x et y soient celles d'un point du lieu, il faut que le produit des racines de l'Eq.

$$(x^2-a^2)m^2 - 2xy.m + y^2-b^2 = 0$$

soit égal à $-\frac{b^2}{a^2}$. Donc

$$\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2} = -\frac{b^2}{a^2}$$

relation entre x et y qui est l'Eq. du lieu: elle donne

$$a^2y^2 + b^2x^2 = 2a^2b^2$$

Eq. d'une ellipse semblable à la première.

De là on déduit le lieu des points de rencontre de la corde de contact avec la droite qui joint le centre au point de concours des tangentes parallèles à deux diamètres conjugués. Car ces deux droites forment les diagonales du parallélogramme. Donc les coord. du point de concours des tangentes sont doubles de celles du point en question. Donc le lieu de celui-ci est

$$4a^2y^2 + 4b^2x^2 = 2a^2b^2$$

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{2}$$

Cette ellipse est le lieu des intersections successives de la corde de contact. — Il suffit de faire voir que si l'on coupe cette ellipse $a^2y^2+b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{2}$ par la droite $a^2\beta y + b^2\alpha x = a^2b^2$, les points $\alpha\beta$ étant sur l'ellipse $a^2y^2+b^2x^2 = 2a^2b^2$, les deux points d'intersection coïncident en un seul. — De l'Eq.

De la droite on déduit

$$y = \frac{b^2(a^2-\alpha x)}{a^2\beta}$$

$$\frac{b^4(a^2-\alpha x)^2}{a^2\beta^2} + b^2x^2 = \frac{a^2b^2}{2} \qquad 2b^2(a^2-\alpha x)^2 + 2a^2\beta^2x^2 = a^4\beta^2$$

$$2(b^2\alpha^2+a^2\beta^2)x^2 - 4a^2b^2\alpha x + 2a^4b^2 - a^4\beta^2 = 0$$

La condition d'égalité des racines est

$$2a^4b^4\alpha^2 = [2a^4b^2 - a^4\beta^2][b^2\alpha^2 + a^2\beta^2]$$

$$2b^4\alpha^2 = (2b^2-\beta^2)(a^2\beta^2+b^2\alpha^2)$$

ou, en vertu de l'Eq. $a^2\beta^2+b^2\alpha^2 = 2a^2b^2$

$$b^4\alpha^2 = a^2b^2(2b^2-\beta^2)$$

$$\alpha^2b^2 = 2a^2b^2 - a^2\beta^2$$

$$a^2\beta^2+b^2\alpha^2 = 2a^2b^2$$

ce qui est. donc... c.q.f.d.

362. Lieu des foyers des paraboles ayant même directrice et même tangente.

Je prends l'Eq. aux foyers

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 = (my+nx+p)^2$$

En prenant la directrice pour l'axe des y, on doit avoir $p=0$, $m=0$: et de plus, comme la courbe est une parabole, on doit avoir $m^2+n^2=1$. Donc ici $n^2=1$. Ce qui réduit l'Eq. à

$$y^2 - 2yy' - 2xx' + x'^2 + y'^2 = 0$$

Soit $y = kx$ une sécante. On aura pour les points d'intersection

$$k^2x^2 - 2ky'x - 2x'x + x'^2 + y'^2 = 0$$

et la sécante devenant tangente, l'Eq. a deux racines égales, c.à.d. que

$$(ky'+x')^2 = k^2(x'^2+y'^2)$$

ou

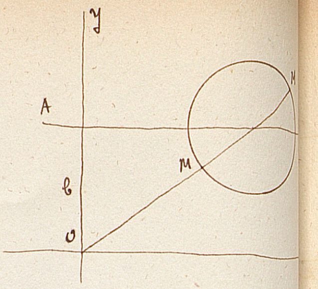
$$2ky'x' = x'^2(k^2-1)$$

$$2ky' = x'(k^2-1)$$

car le lieu $x'=0$ est étranger. Donc le lieu est une droite passant par l'origine.

Le lieu des sommets est aussi une droite.

363. Le centre d'un cercle de rayon constant r se meut sur une droite fixe AB indéfinie. Par un point fixe o on lui mène des sécantes OM passant par le centre. Lieu des points M.



L'Eq. du cercle est

$$(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2$$

α étant l'abscisse variable du centre. Et l'Eq. du diamètre mené par le point o sera

$$y=\frac{b}{\alpha}x$$

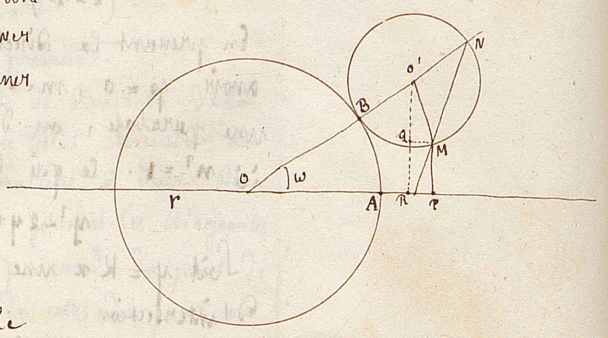
J'élimine α et j'ai

$$x=\frac{y}{y-b}\sqrt{r^2-(y-b)^2}$$

cette courbe est la Conchoïde.

364. La même méthode qui a servi (349) pour déterminer l'Eq. de l'Epicycloïde engendrée par un cercle de Re roulant sur un autre de Rayon égal, peut encore être employée si celui-ci a un Rayon double.

Considérons le cercle o' dans une position particulière. Pour trouver le point décrivant, il suffit de mener NP faisant avec la ligne des centres un angle égal à NOP = ω : car on voit facilement qu'alors l'arc BM = l'arc BA.



O l'origine. M (x y). r le Rayon du grand cercle.

J'ai

$$x=OR+RP=\frac{3}{2}r\cos\omega+QM$$

or $QM=-\frac{1}{2}r\cos 3\omega$ donc

$$x=\frac{1}{2}r\left(3\cos\omega-\cos 3\omega\right)$$

ou bien en transformant $\cos 3\omega$

$$x=r\left(3\cos\omega-2\cos^3\omega\right)$$

J'ai de même

$$y=O'R-O'Q=\frac{3}{2}r\sin\omega-\frac{1}{2}r\sin 3\omega$$

$$=\frac{1}{2}r\left(3\sin\omega-\sin 3\omega\right)$$

et, en transformant $\cos 3\omega$

$$y = 2r\sin^3\omega = 2r\sqrt{(1-\cos^2\omega)^3}$$

Il s'agit d'éliminer ω entre ces deux Eq. Je les élève au carré.

$$\begin{cases} x^2 = r^2(9\cos^2\omega + 4\cos^6\omega - 12\cos^4\omega) \\ y^2 = 4r^2(1-\cos^6\omega + 3\cos^4\omega - 3\cos^2\omega) \end{cases}$$

ou bien

$$\begin{cases} 4r^2\cos^6\omega - 12r^2\cos^4\omega + 9r^2\cos^2\omega - x^2 = 0 \\ 4r^2\cos^6\omega - 12r^2\cos^4\omega + 12r^2\cos^2\omega + y^2 - 4r^2 = 0 \end{cases}$$

Retranchant

$$3r^2\cos^2\omega - 4r^2 + x^2 + y^2 = 0$$

$$\cos^2\omega = \frac{4r^2 - x^2 - y^2}{3r^2}$$

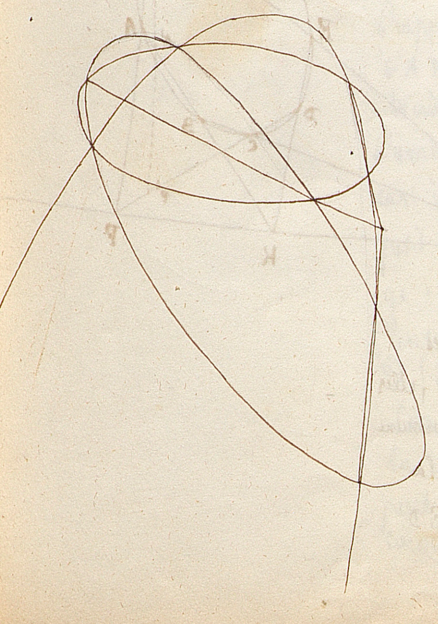
Substituant dans l'Eq. $y^2 = 4r^2(1-\cos^2\omega)^3$, il vient

$$27r^4y^2 = 4(y^2+x^2-r^2)^3$$

Eq. du lieu.

On sait que la courbe représentée par cette Eq. est la caustique engendrée par des rayons lumineux parallèles à l'axe se réfléchissant sur une surface sphérique.

365. Soient trois coniques ayant deux points communs. Les trois cordes communes menées par les autres points d'intersection se coupent en un même point.



Soient les Eq. des 3 coniques

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

$$A'y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

$$A''y^2 + B''xy + C''x^2 + D''y + E''x + E'' = 0$$

Je prends pour axe des x la corde commune aux trois courbes. alors, en faisant $y=0$ dans les trois Equations, il faut qu'elles deviennent identiques. Il faut donc que l'on ait $C = C' = C''$, $E = E' = E''$, $F = F' = F''$.

Si maintenant je retranche les deux premières Equations l'une de l'autre, j'ai l'Eq.

$$(A-A')y^2 + (B-B')xy + (D-D')y = 0$$

d'un lieu passant par les 4 points communs à ces deux courbes. Or cette Eq. se décompose

en deux facteurs, $y=0$ qui est l'Eq. de l'axe des x, et

$$(A-A')y+(B-B')x+(D-D')=0$$

qui est nécessairement l'autre corde commune.

De même en retranchant la 3e Eq. de la 1re j'aurai l'Eq. d'un lieu du second degré formé de l'axe des x et de l'autre corde commune dont l'Eq. sera

$$(A-A'')y+(B-B'')x+(D-D'')=0$$

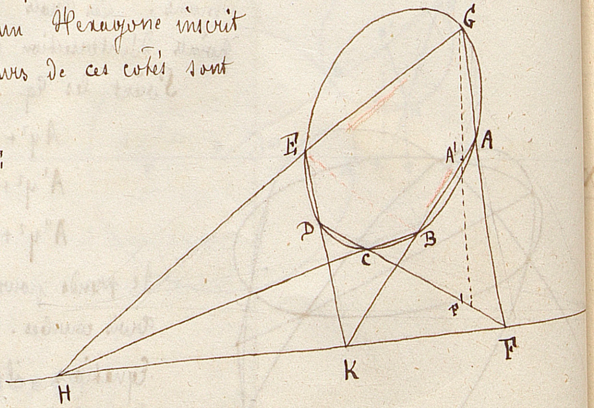
Maintenant, en retranchant l'Eq. des deux cordes l'une de l'autre, j'ai l'Eq.

$$(A'-A'')y+(B'-B'')x+(D'-D'')=0$$

d'une droite qui passe par leur point d'intersection. Or en retranchant de l'Eq. de la 2e conique celle de la 3e, j'obtiens encore un lieu du second degré, formé de l'axe des x et de la corde commune dont l'Eq. est précisément $(A'-A'')y+(B'-B'')x+(D'-D'')=0$. — Donc les 3 cordes communes se coupent en un même point (Sturm).

De cette proposition découle immédiatement la démonstration de l'Hexagramme mystique de Pascal.

Si l'on prolonge les côtés opposés d'un Hexagone inscrit dans une conique, les points de concours de ces côtés sont en ligne droite.



En effet les deux droites AB et GF doivent être considérées comme un lieu du 2e degré, de même que le système des droites BC et DE. ainsi, avec la conique circonscrite, j'ai 3 lieux du second degré qui se coupent en 2 points B et E communs à tous trois. Si donc on mène les cordes communes pour les autres points d'intersection, elles concourront en un même point. Or la corde commune aux deux systèmes de droites est la ligne HK, la corde commune à la conique et au système BC, ED est le côté CD, et la corde commune à la conique

et au système AB, GE est le côté AG. Donc AG, CD et HK concourront en un même point. Donc les points de concours F K H sont sur une même droite.

Réciproquement : Soient A B C D E G six points donnés : par les 5 premiers on peut toujours faire passer une conique. Si les points de concours des côtés opposés de l'Hexagone formé par les six points sont en ligne droite, la conique passe par le sixième point.

Voir 382.

Supposons en effet qu'elle n'y passe pas, et soit A ce point. Soit au contraire A' le point où elle rencontre le côté de l'Hexagone. alors, d'après le th. direct, les 3 points F' K H seraient en ligne droite : ce qui est absurde, puisque F K H sont en ligne droite par hypothèse.

De là, étant connus cinq points B C D E G d'une conique, il est facile d'en déterminer une infinité d'autres : en prolongeant BC et GE, on obtient le point H : on prolonge de même F D et CD, et, par H, on mène une droite qcq. ... etc.

2e. conséquence. Etant donnés cinq points d'une conique, trouver la tangente. Si l'on suppose que A se rapproche indéfiniment de G jusqu'à coïncidence, GAF deviendra tg. en G. De là un moyen de construire la tangente : on prolonge GE et BC, en remarquant que ces deux côtés sont encore opposés : car ils sont séparés par AB et par le côté infint. petit AG. on joint GB et ED, et l'on prolonge : puis par H et F on mène une droite qui rencontre le prolongement de CD : on joint le point d'intersection au point G, et l'on a la tgte.

Comme on peut connaître une infinité de points de la courbe, il s'ensuit qu'avec de simples droites on peut construire la tgte à tous les points de la courbe.

3e. conséquence. Si 2 côtés alternes deviennent

mes, les tgtes aux sommets du triangle vont rencontrer les côtés opposés en 3 points qui sont en ligne droite.

2e. Conséquence. Hexagone de Brianchon. –

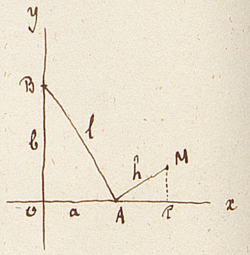
366. D'un point K on mène des tangentes à des cercles concentriques. Lieu des points de contact.

$$x^2+y^2=R^2 \qquad \alpha x+\beta y=R^2$$

$$x^2+y^2=\alpha x+\beta y$$

Eq. d'un cercle ayant KO pour diamètre. Evidt.

367. AB = Const. AM, perp. sur BA, = Const. Lieu de M.



$$l^2=a^2+b^2$$

$$y:a::h:l \qquad a=\frac{ly}{h}$$

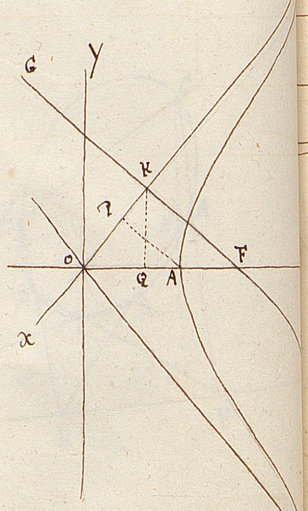
$$x-a:b::h:l \qquad b=\frac{l(x-a)}{h}=\frac{l(hx-ly)}{h^2}$$

Substituant

$$(l^2+h^2)y^2+h^2x^2-2lhxy-h^4=0$$

Ellipse. O le centre. – Le maximum de x est l.

368. Lieu des sommets des hyperboles ayant même foyer et même asymptote.



Soient prises pour axes l'asymptote et la perp. FK abaissée du foyer sur l'asymptote. On sait que KF = b, OK = a.

Soient x et y les coord. AP et PK du sommet A. Nous avons

$$OF^2=a^2+b^2$$

$$OF:a::a:a-x \qquad OF:b::a:y$$

$$a^2=OF(a-x) \qquad ab=OF.y$$

$$\frac{a}{b}=\frac{a-x}{y}$$

$$ay+bx=ab$$

Eq. de la droite OF.

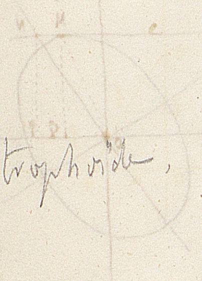
Maintenant, comme OA = a, le point A doit se trouver sur un cercle décrit du point O comme centre avec a pour rayon, dont l'Eq. est par conség.t

$$y^2+x^2-2ax=0$$

Si nous éliminons a entre cette Eq. et celle de OF' nous aurons l'Eq. du lieu. on trouve

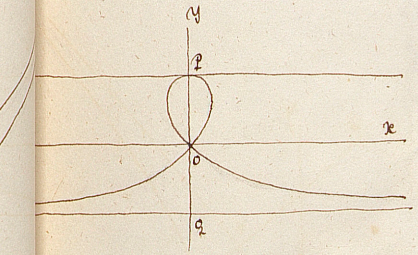
$$y^2(b-y) = x^2(b+y)$$

$$x = \pm y\sqrt{\frac{b-y}{b+y}}$$



Strophoïde

On voit que le problème revient à celui-ci : on donne un cercle de rayon variable dont le centre se promène sur une droite fixe, et qui reste constamment tgt. à une droite perp. à la 1ère : par son centre et un point fixe on mène des sécantes : on demande le lieu des points d'intersection. — Ou bien encore : on donne un angle droit et un point sur un de ses côtés. Par ce point on mène des transversales et l'on prend à partir du point où elles rencontrent le second côté une distance égale à la distance de ce point au sommet. Trouver le lieu des points ainsi déterminés.



En construisant le lieu soit d'après son Eq. soit géométriquement d'après le dernier énoncé, on lui trouve la forme ici indiquée. P est le point fixe, O l'origine ou le sommet de l'angle droit, OP = OQ = b. Les tgtes à l'origine sont les bissectrices de l'angle des axes. Le maximum d'abscisse de la branche OP correspond à l'ordonnée $y = \frac{b(\sqrt{5}-1)}{2}$

On peut encore trouver l'Eq. du lieu par la méthode de transformation de coordonnées.

Les formules sont (axes rect. à ax. rect.)

$$x = m + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$$

$$y = n + x'\sin\alpha + y'\cos\alpha$$

Or $m = OQ = \frac{a^2}{c}$ $n = KQ = \frac{ab}{c}$. De plus

$\cos\alpha = \cos KFX = -\cos KFO = -\sin KOF = -\frac{a}{c}$; $\sin\alpha = \frac{b}{c}$

car $\operatorname{tg} KOF = \frac{b}{a}$. Les formules deviennent alors

$$x = \frac{a^2}{c} - \frac{ax'}{c} - \frac{by'}{c} \qquad y = \frac{ab}{c} + \frac{bx'}{c} - \frac{ay'}{c}$$

Mais $x = a$ $y = 0$. donc

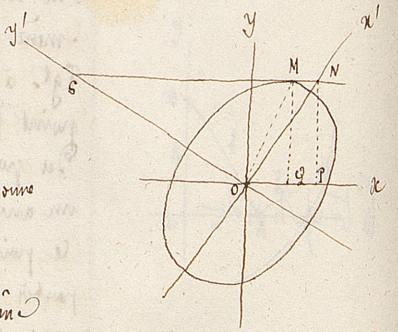
$a^2 - ax' - by' = ac \qquad ab + bx' - ay' = 0$

En outre $\qquad c^2 = a^2 + b^2$

Il faut éliminer a et c entre ces 3 équations. —

369. Une ellipse tourne autour de son centre. On demande le lieu des points de contact d'une tangente constamment parallèle à une direction donnée.

Soit ox la direction donnée, M le point de contact.



$$x^2 + y^2 = b'^2 \qquad a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$$

$$ab = a'b'\sin\gamma \quad \text{et comme } b'\sin\gamma = y \quad ab = a'y$$

Il faut éliminer a' et b' entre ces 3 éq. ce qui donne

$$y^2(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) - a^2b^2 = 0$$

On demande le lieu des intersections de la même tangente avec le grand axe ox'. — Supposons l'ellipse rapportée à son centre et à ses axes. L'éq. de la tangente serait

$$y = -mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \qquad m = \operatorname{tg} ONS$$

D'où

$$OS = \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

Mais

$$OR = NP = OS \cos. \operatorname{arc tg} m = \frac{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

Et cette longueur est précisément l'y de N. En outre l'éq. de l'axe ox' par rapport aux axes de coord. yox est $y = mx$ d'où $m = \frac{y}{x}$. Par suite

$$y^2 = \frac{a^2y^2 + b^2x^2}{x^2 + y^2} \qquad y^2(x^2 + y^2) - (a^2y^2 + b^2x^2) = 0$$

370. Développée de l'ellipse. — L'éq. de la normale est

$$y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x') \qquad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$$

se met sous la forme

$$b^2x'y - a^2y'x + c^2x'y' = 0$$

Soit une autre norm.

$$b^2x''y - a^2y''x + c^2x''y'' = 0$$

Retranchant

$$0 = b^2y(x' - x'') - a^2x(y' - y'') + c^2[x'(y' - y'') + y''(x' - x'')]$$

$$b^2y - a^2x\frac{y' - y''}{x' - x''} + c^2x'\frac{y' - y''}{x' - x''} + c^2y'' = 0$$

Mais les Eq. de condition donnent

$$\frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{b^2(x'+x'')}{a^2(y'+y'')}$$

et par suite

$$\lim \frac{y'-y''}{x'-x''} = -\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

Donc, lorsque les normales coïncident en une seule

$$b^2y + a^2x\frac{b^2x'}{a^2y'} - c^2x'\frac{b^2x'}{a^2y'} + c^2y' = 0$$

Eq. de Continuité.

Il faut maintenant éliminer x' et y' entre cette Eq. et celles de la normale. Ces 3 Eq. sont

$$b^2x'y - a^2y'x + c^2x'y' = 0 \qquad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$$

$$a^2b^2yy' + a^2b^2xx' + a^2c^2y'^2 - b^2c^2x'^2 = 0$$

Proposons-nous de déduire de la première et de la dernière les valeurs de x et y. Nous trouverons que x est fonction de x' seul, et y fonction de y' seul. Multipliant l'Eq. de la normale par a^2y', celle de continuité par x' et retranchant, j'ai

$$a^2x(a^2y'^2 + b^2x'^2) - b^2c^2x'^3 = 0 \qquad a^4x - c^2x'^3 = 0 \qquad x' = \left(\frac{a^4x}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

De même en éliminant y

$$y' = \left(-\frac{b^4y}{c^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Substituant maintenant ces valeurs de x' et de y' dans l'Eq. $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, il vient

$$a^2\left(\frac{b^4y}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + b^2\left(\frac{a^4x}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = a^2b^2$$

$$\left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$$

$$(by)^{\frac{2}{3}} + (ax)^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}}$$

Par un point intérieur à cette courbe on peut lui mener 4 tangentes, et par suite 4 normales à l'Ellipse. Et en effet, si l'on élimine une des quantités x' y' entre l'Eq. de l'Ellipse et celle de la normale, les valeurs de l'autre sont données par une Eq. du 4e degré. D'un point de la développée elle-même on ne peut lui mener que 3 tgtes, et enfin par un point extérieur

on ne peut en mener que deux.

Pour avoir la développée de l'Hyperbole, il suffit de changer b en $b\sqrt{-1}$.

371. Lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole deux normales à angle droit.

$$y = m(x-p) - \frac{pm^3}{2}$$

$$pm^3 - 2(x-p)m + 2y = 0$$

Soient m' m'' m''' les 3 Racines. On a $m'm''m''' = -\frac{2y}{p}$

Mais on doit avoir $m'm'' = -1$. Donc $m''' = \frac{2y}{p}$. ce doit donc être là une des Racines de l'Eq. ce qui exige que l'on ait

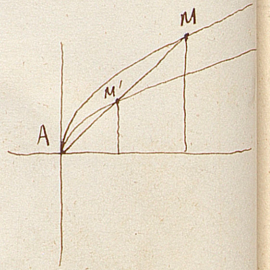
$$\frac{8y^3}{p^3} - \frac{4(x-p)}{p^2}y + \frac{2y}{p} = 0$$

$\frac{2y}{p}$ est facteur commun, et comme $y=0$ n'est évidemment pas le lieu cherché, on peut le supprimer

$$\frac{4y^2}{p^2} - \frac{2(x-p)}{p} + 1 = 0$$

$$y^2 = \frac{1}{2}p(x-p) - \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{2}px - \frac{3}{4}p^2$$

Eq. d'une parabole. — Elle est tgte à la développée de la parabole proposée.



372. Toutes les paraboles sont semblables. En effet AM est proport. à AM'.

$$\overline{AM}^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 2px = x(x+2p)$$

Soit $y = ax$ l'Eq. de AM. On aura les abscisses des points d'intersection avec la courbe en posant

$$a^2x^2 = 2px \qquad x = 0 \qquad x = \frac{2p}{a^2}$$

donc

$$\overline{AM}^2 = \frac{2p}{a^2}\left(\frac{2p + 2a^2p}{a^2}\right) = \frac{4p^2}{a^4}(1+a^2)$$

$$AM = \frac{2p}{a^2}\sqrt{1+a^2} \qquad \Big| \qquad \frac{AM}{AM'} = \text{Const.}$$

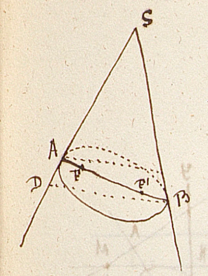
$$AM' = \frac{2p'}{a^2}\sqrt{1+a^2}$$

C.q.f.d.

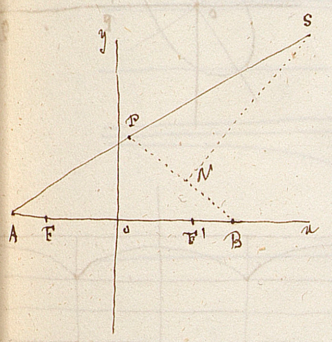
373. Lieu des sommets des Cones circulaires droits passant par une Ellipse donnée.

On voit d'abord immédiatement que le lieu est une

courbe plane : car le sommet du cône est toujours contenu dans le plan perp. au plan de l'Ellipse et passant par son grand axe.



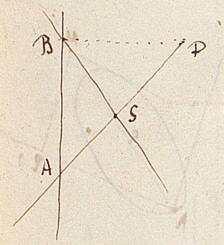
Maintenant soit S le sommet d'un des cônes passant par l'ellipse donnée, dont AB est le grand axe. On sait que AD en est l'excentricité. Mais SB − SA est égal à AD. Donc SB − SA = const. Donc le point S décrit une hyperbole dont les points A et B sont les foyers, dont AD est l'axe transverse en longueur, et qui par conséquent a ses sommets aux foyers F et F' de l'Ellipse proposée.



Ce problème peut aussi se résoudre de la manière suivante. Soit AB l'axe de l'ellipse, donné de grandeur et de position. AS une droite qcq. Je prends AP = FF', je joins PB, j'élève NS perp. sur le milieu de PB : le point S d'intersection avec AS est le sommet d'un des cônes passant par l'ellipse donnée. — Cherchons le lieu des points S. — C'est une hyperbole :

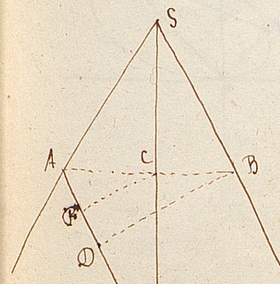
$$c^2y^2 - b^2x^2 = -b^2c^2$$

374. Lieu des sommets des cônes passant par une hyperbole donnée.



Soit AB l'axe transverse de l'hyperbole, et S le sommet d'un des cônes passant par cette hyperbole. AS + SB = AS + SD = const. = l'excentr. de l'Hyp. Donc le lieu est une ellipse dont les sommets sont aux foyers de l'Hyperbole.

375. Lieu des sommets des cônes passant par une parabole donnée.

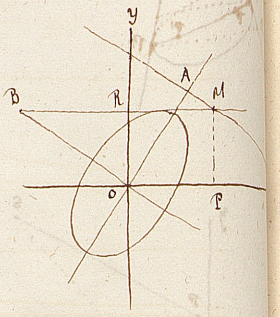


Soit AF l'axe de la parabole et F son foyer. S le sommet d'un cône passant par cette parabole. On sait que, AB étant perp. à l'axe SC, CF est perp. à l'axe de la parabole. Menons BD parallèle à CF. Cette droite sera perp. à AD et à SB. Or cette droite BD est fixe pour tous les cônes. 1°. elle est

fixe de direction, 2°. le point D est fixe, car AD = 2AF = p. Or SA = SB. Donc S est egalem^t. éloigné de A et de BD. Donc le lieu est une parabole qui a même param. que la proposée, dont le foyer est en A, le sommet en F et la directrice BD. — Son Eq. rapportée aux axes de la parabole donnée est donc

$$y^2 = -2p\left(x + \frac{p}{2}\right)$$

376. Une Ellipse tourne autour de son centre. Trouver le lieu des points où une tangente constamment parallèle à une direction donnée rencontre la directrice.

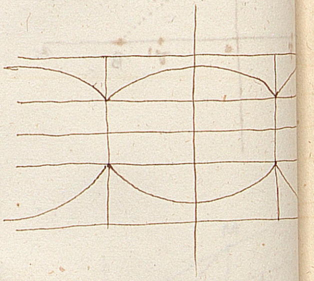


$$y = MP = OR = OB\cos BOR \qquad OB = \sqrt{a^2m^2+b^2} \qquad m = \operatorname{tg} BOR$$

$$y = \frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$OA = \frac{a^2}{c} = OQ\cos AOQ = (OP+PQ)\cos AOQ \qquad OP = x \qquad OQ = PM\operatorname{tg} PMQ$$

$$PQ = y\operatorname{tg} PMQ = my$$

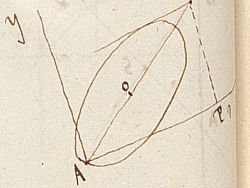


$$\frac{a^2}{c} = \frac{x+my}{\sqrt{1+m^2}}$$

Et il reste à éliminer m entre ces deux Eq.

$$x = \pm\frac{a^2 - y\sqrt{y^2-b^2}}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

377. Une Ellipse tourne autour de son sommet: trouver le lieu des points où une tgte parallèle à une direction donnée rencontre le grand axe.



$$MP = y \qquad AP = x$$

$$y = AM\sin MAP$$

Si la courbe était rapportée à son centre et à ses axes, la tgte aurait pour Eq.

$$y = -mx + \sqrt{a^2m^2+b^2} \qquad m = \operatorname{tg} MAP.$$

Donc $OM = \frac{\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m}$ d'où $AM = \frac{am+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{m}$ et $y = \frac{am+\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$

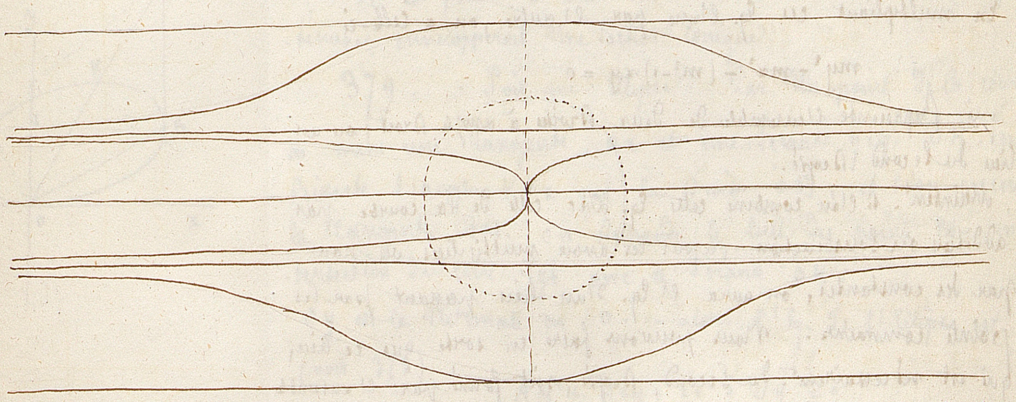
Maintenant $y = mx$ est l'Eq. de l'axe AM et il faut éliminer m entre ces deux Eq.

$$y = \frac{ay + \sqrt{a^2y^2+b^2x^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

En coordonnées polaires

$$\rho = a + \sqrt{a^2 + b^2 \cot g^2 \omega}$$

Le Radical porte le double Signe : car dans chaque position de l'Ellipse il y a deux Tgtes parallèles à la direction donnée, qui rencontrent le Grand axe de part et d'autre de l'origine.



Lorsque l'Ellipse se réduit à un cercle l'Eq. devient

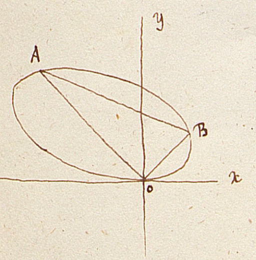
$$y = \frac{R(y + \sqrt{y^2+x^2})}{\sqrt{y^2+x^2}} \qquad \rho = R\left(1 \pm \frac{1}{\sin \omega}\right)$$

et la courbe se réduit à une conchoïde.

Si l'Ellipse devient une parabole : on fait $b^2 = ap - \frac{1}{4}p^2$ et $a = \infty$.

$$y^2 = \frac{px^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 2\rho = p \cot^2 \omega.$$

378. Un angle droit AOB se meut autour de son sommet qui repose sur un point d'une courbe du Second degré. La corde AB passe constamment par un point fixe, situé sur la normale au point o.



Je prends pour axes la Tgte et la Norm. en o. L'Eq. de la courbe sera de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0$$

puisque l'origine est un point de la courbe. En outre l'axe des x est tangent. Donc l'Eq.

$$Cx^2 + Ex = 0$$

doit avoir ses deux racines nulles. Donc $E=0$. Donc l'Eq. de la courbe est

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy=0$$

avec la condition que les axes sont rectangulaires.

Cela posé les Eq. des deux cordes OB et OA seront

$$y=mx \quad \text{et} \quad y=-\frac{1}{m}x \quad \text{ou} \quad my+x=0$$

En multipliant ces Eq. l'une par l'autre, on a celle-ci

$$my^2-mx^2-(m^2-1)xy=0$$

qui représente l'ensemble de deux droites à angle droit, ou un lieu du second degré.

Maintent. si l'on combine cette Eq. avec celle de la courbe par addition ou soustraction, après les avoir multipliées ou non par des constantes, on aura l'Eq. d'un lieu passant par les points communs. Nous pouvons faire en sorte que ce lieu, qui est nécessairemt. du second degré, soit formé par l'ensemble de l'axe des x et de la corde AB : il suffit pour cela de faire en sorte que y soit facteur commun dans l'Eq. résultante. Et l'on y parvient en multipliant la 1ère par m la 2e. par C et ajoutant. On a en effet de cette manière :

$$(mA+mC)y^2+[mB-C(m^2-1)]xy+mDy=0$$

lieu qui se décompose en deux

$$y=0$$

$$m(A+C)y+[mB-C(m^2-1)]x+mD=0$$

dont le second représente nécessairemt. la corde AB. Or dans l'Eq. de cette droite, faisons $x=0$, on trouve

$$y=-\frac{D}{A+C}$$

valeur constante, quel que soit m. Donc ....

On peut aussi chercher le lieu des intersections successives de cette droite. Il suffit d'ordonner l'Eq. par rapport à m puis d'exprimer que les deux racines de l'Eq. sont égales.

$$Cxm^2-[(A+C)y+Bx+D]m-Cx=0$$

ce qui donne la condition

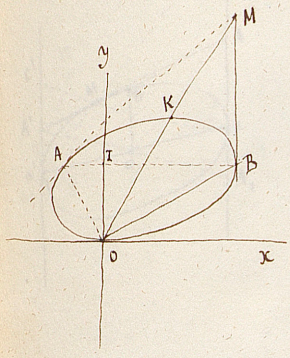
$$\left[(A+C)y+Bx+D\right]^2+4C^2x^2=0$$

Somme de deux carrés. Donc on doit avoir séparément

$$x=0 \qquad y=-\frac{D}{A+C}$$

Donc le lieu se réduit à un point situé sur l'axe des y ou sur la normale au point O.

Si le point O était hors de la courbe, la corde hypoténuse envelopperait une section conique.



379. Soit une Ellipse. Par un point de la courbe on mène une tangente Ox et une sécante qcq. OK. On bissecte l'angle KOx par la droite OB, et l'on mène la tangente BM. On demande le lieu des points M, intersection de cette tgte avec la sécante OK.

Oy est la normale en O. — alors l'Eq. de l'Ellipse est (voir 378)

$$Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy=0$$

Soit $y=mx$ celle de OB. OK aura pour Eq:

$y=\frac{2m}{1-m^2}x$. Cherchons les coordonnées de B.

Les racines de l'Eq:

$$(Am^2+Bm+C)x^2+Dmx=0$$

sont les abscisses des points O et B, $x=0$ et $x'=\frac{-mD}{Am^2+Bm+C}$

on a en même temps $y'=\frac{-Dm^2}{Am^2+Bm+C}$.

L'Eq. générale de la tgte au point $x'y'$ est

$$Yy'+Xx'+Dy=0$$

et en remplaçant x' et y' par les valeurs précédentes

$$-Ym^2D-mXD+Dy(Am^2+Bm+C)=0$$

Nous pouvons diviser par D qui n'est pas nul et ne peut l'être: car s'il l'était, l'Eq. ne représenterait plus rien. En développant et ordonnant par rapport à m, cette Eq. devient

$$m^2(Ay + Bx + D) + 2Cxm - Cy = 0$$

Il faut éliminer m entre cette Eq. et celle de OK :

$$ym^2 + 2xm - y = 0$$

Multiplions celle-ci par C et retranchons :

$$m^2\big((A-C)y + Bx + D\big) = 0$$

$$(A-C)y + Bx + D = 0$$

Eq. du lieu. — or je dis que cette droite est précisém^t. la polaire du point I fixe du problème précédent, dont nous avons vu que les coord. étaient

$$x = 0 \qquad y = -\frac{D}{A-C}$$

Cherchons en effet le pôle de cette droite, $(A-C)y + Bx + D = 0$.

L'Eq. générale de la polaire du point $x'y'$ est

$$Y'y + X'x + Dy' + Ex' + 2F = 0$$

$$E = F = 0 \qquad Y'y + X'x + Dy' = 0$$

Identifions cette Eq. avec celle de la droite

$$\frac{X'}{Y'} = \frac{B}{A-C} \qquad \frac{D}{A-C} = \frac{Dy'}{Y'} \quad \text{ou bien } y' = \frac{Y'}{A-C}$$

cette dernière donne $A - C = \frac{Y'}{y'}$ et cette valeur substituée dans la première donne

$B = \frac{X'}{y'}$ ou $By' = x' - 2Cx' + By'$. Il vient donc $x' = 0$ pour l'abscisse du pôle.

2e Eq. $\quad y' = \frac{Y'}{A-C} = \frac{2Ay' + Bx' + D}{A-C}$ donne celle-ci

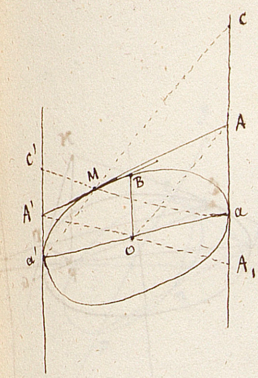
$$Ay' - Cy' = 2Ay' + Bx' + D \qquad x' = 0$$

$$y' = -\frac{D}{A+C}$$

Ce qui démontre le théorème énoncé. La bissectrice OB est l'un des côtés de l'angle droit mobile.

D'ailleurs on peut voir autrement que le lieu des points M est la polaire du point I. En effet, pour détermi-ner un point de cette polaire, il faudrait par le point I mener une sécante telle que AB, et, par les extrémités, des tangentes : le point de concours est un point de

la polaire. Or je dis que ce point est précisément le point M. En effet, je puis dans tous les calculs remplacer m par $-\frac{1}{m}$ sans que rien soit changé, puisque m disparaît : donc le lieu est le même, soit que l'on considère la bissectrice OB de l'angle Kox, ou OA bissectrice de Kox'. Donc le lieu est aussi celui des intersections des tangentes BM et AM. Donc...



380. Soit une Ellipse et deux tgtes parallèles. Une 3e. tgte qcq. détermine sur les deux premières des segments tels que l'on a $Aa \cdot A'a' = \overline{OB}^2$

($OB = \frac{1}{2}$ diam. parall. aux 2 tg.). — Menons les diam. conj. parallèles aux cordes supplémentaires a'M et aM, à savoir OA et OA' : OA passera en A et OA' en A', car on sait que un point qcq., le milieu de sa corde de contact et le centre sont en ligne droite. — Or on a $Aa \cdot A_1a = \overline{OB}^2$. Mais à cause des parallèles Ma et A'A₁, Aa et A'a', on a $A'a' = aA_1$: donc

$$Aa \cdot A'a' = \overline{OB}^2 \quad \text{cqfd.}$$

On verra par suite que $aC \cdot a'C' = 4\,\overline{OB}^2$, aC et a'C' étant respectivement doubles de aA et a'A'. De telle sorte que étant donnés deux points, et par ces points a et a' deux parallèles aC et a'C', si l'on mène des transversales aC' et a'C telles que le produit $aC \cdot a'C'$ soit constant, le lieu des points d'intersection M de ces transversales sera une Ellipse dont aa' est un diamètre.

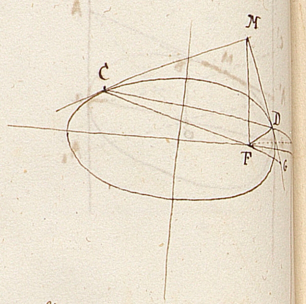
Enfin de la similitude des triangles A'AA₁ et AMa, il résulte que $\frac{Aa}{Aa'} = \frac{AM}{A'M}$.

De ce théorème on déduit la solution de ce problème : Etant donnés deux points A et B, extrémités d'un diamètre, et la direction de son conjugué, déterminer la tangente à l'Ellipse en un point donné. Par les

points A et B on mène des parallèles au conjugué. Ce sont deux tangentes. Par le point donné M on mène les cordes supplémentaires, et par le centre une parallèle OC à la corde AM, jusqu'à sa rencontre C avec la Ellipse en B. C appartient à la Ellipse en M.

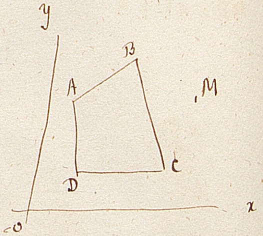
381. Soit une Ellipse, deux tangentes MC et MD ; on joint CF, DF et MF. MF bissecte CFD.

En effet soit B le point de rencontre de CD avec la directrice. On sait (360) que BF bissecte DFG et qu'en outre BF est perp. à la polaire de B, qui est FM. Donc ....



382. Par cinq points on peut faire passer une conique, et une seule.

Soient d'abord les points A B C D.



Éq. de AB $\quad ax + by + c = 0$

— BC $\quad a'x + b'y + c' = 0$

— CD $\quad a''x + b''y + c'' = 0$

— DA $\quad a'''x + b'''y + c''' = 0$

Les droites AB avec DC forme un lieu du 2d degré qui a pour Éq.

$$(ax+by+c)(a''x+b''y+c'') = 0 \quad \text{ou} \quad M = 0$$

De même le système de BC et DA est donné par l'Éq. du 2d degré

$$(a'x+b'y+c')(a'''x+b'''y+c''') = 0 \quad \text{ou} \quad N = 0$$

L'Éq. $\quad M + KN = 0 \quad K = \text{const.}$

représente une conique passant par A B C D. La constante K étant qcq. on voit que, par 4 points, on peut faire passer une infinité de courbes du second degré.

Prenons maintenant un 5e point $x'y'$ qui ne soit sur aucun des côtés du quadrilatère ABCD. Si nous

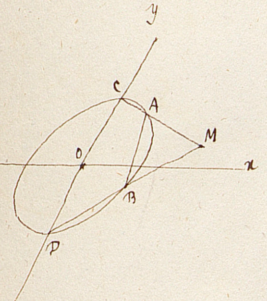
voulons que le lieu $M + KN = 0$ passe par ce point, il faut que cette Eq. soit vérifiée par les coord. x' et y' : ce que j'écris ainsi $M' + KN' = 0$: alors

$$K = -\frac{M'}{N'}$$

valeur ni infinie, ni nulle, ni indéterminée, puisque ...

donc la condition que la conique passe par un cinquième point détermine complètement son Eq. donc ....

383. Une corde AB se meut parallèlemt. à elle-même dans une ellipse. Le diam. CD est fixe ; lieu de M.



$OD = OC = b$

Eq. de CA $\quad y - b = mx$

— BD $\quad y + b = m'x$

L'ensemble des deux droites sera

$$(y - b - mx)(y + b - m'x) = 0$$

ou

$$y^2 - b^2 + mm'x^2 - (m+m')xy + (m'-m)bx = 0$$

Eq. de l'Ellipse $\quad a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$

si nous retranchons ces deux Eq., la 1ère étant ~~et~~ multipliée par a^2, le lieu du second degré

$$(b^2 - a^2mm')x^2 + a^2(m+m')xy - a^2(m'-m)bx = 0$$

passera par les points communs. donc l'Eq.

$$(b^2 - a^2mm')x + a^2(m+m')y - a^2(m'-m)b = 0$$

représente nécessairemt. la droite AB.

or cette droite se meut parallèlemt. à elle-même. donc son coeff. ang. est constant

$$\frac{a^2mm' - b^2}{a^2(m+m')} = \delta$$

Reste à éliminer m et m' entre cette Eq. et celles de AC et de BD. on trouve

$$a^2y^2 - b^2x^2 - 2a^2\delta xy - a^2b^2 = 0$$

Eq. d'une hyperbole rapportée à son centre. — Ce lieu

contient évidemt. à la fois les intersections des cordes AC et BD et celles des cordes AD et BC.

Supposons qu'au lieu de se mouvoir parallèlemt. à elle-même, la droite AB tourne autour d'un point fixe $\alpha\beta$. alors l'Eq. de AB devra être satisfaite pour ces valeurs de x et y, et l'on aura

$$(b^2 - a^2 mm')\alpha + a^2(m+m')\beta - a^2(m'-m)b = 0$$

Eliminant m et m', on a

$$\alpha b^2x^2 - a^2\alpha y^2 + 2a^2\beta xy - 2a^2b^2x + a^2b^2\alpha = 0$$

Eq. d'une hyperbole, mais non plus rapportée à son centre.

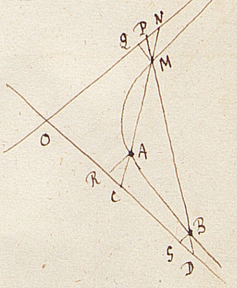
Pour passer de ce second problème au précédent, il faut envoyer le point $\alpha\beta$ à l'infini. Mais on ne peut faire directemt. $\alpha = \beta = \infty$ dans l'Eq. Il faut introduire la direction δ de la droite. où $\delta = \frac{\beta}{\alpha}$. D'où $\beta = \alpha\delta$.

$$\alpha b^2x^2 - \alpha a^2y^2 + 2\alpha a^2\delta xy - 2a^2b^2x + a^2b^2\alpha = 0$$

Je divise par α, je fais $\alpha = \infty$ et j'ai bien

$$a^2y^2 - b^2x^2 - 2a^2\delta xy - a^2b^2 = 0$$

384. Par deux points A et B fixes sur une hyperbole on mène deux droites AM et BM qui concourent sur la même hyperbole: ces deux droites interceptent sur l'asymptote une longueur constante CD.

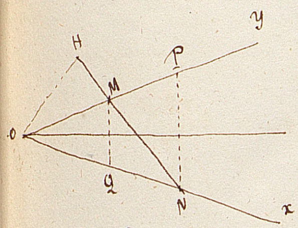


on a (fig.) NM = AC, PM = BD. Donc les triangles ARC et QMN sont égaux ainsi que BDS et QMP. Donc QM = RC et QM = SD. Donc RC = SD. Donc RS = CD. Mais RS est constant et égal à la différence des abscisses asymptotiques des points fixes A et B. Donc CD est aussi constant. cqfd.

385. Courbe du Réverbère. (Hyperbole).

386. On coupe un cône circ. droit par une infinité de plans de manière que le volume retranché soit constant: on demande la surf. qu'enveloppent tous ces plans.
Ce problème peut se représenter aux yeux en concevant un verre conique rempli en partie de liquide, et que l'on incline dans toutes les positions.

Le problème sera évidemt. résolu si l'on détermine la courbe résultant de l'intersection de la surface cherchée par un plan mené suivant l'axe du cône: car la symétrie de toutes les parties autour de l'axe fait voir que la surface cherchée est de révolution. Pour avoir cette courbe génératrice, il suffit de considérer les positions du cône dans lesquelles le grand axe de l'ellipse interceptée par le plan sécant reste avec l'axe du cône dans un plan invariable. Le problème est donc ramené à une simple question de géométrie plane. Car il est évident, à cause de la symétrie de l'ellipse autour de son grand axe, que le point de contact de la surface avec la courbe se trouve sur ce grand axe.



Prenons pour axes de coord. les génératrices du cône qui se trouvent dans le plan fixe dont nous avons parlé. Soit MN le grand axe de l'ellipse. Comme le volume retranché est constant, V, nous aurons toujours, en appelant m et n les demi-axes de l'ellipse,

$$\frac{1}{3}\pi m.n.\overline{OH} = V$$

D'autre part la surface du triangle OMN sera

$$S = m.\overline{OH}$$

Donc $S = \frac{3V}{\pi n}$. — appelons a et b les segments ON et OM, menons NP et MQ perp. à l'axe du cône. Nous savons que NQ est égal au double de l'excentricité de l'ellipse. $NQ = 2\sqrt{m^2-n^2}$. D'autre part $NQ = a-b$. Donc

$$(a-b)^2 = 4(m^2-n^2)$$

d'où

$$n^2 = \frac{4m^2-(a-b)^2}{4}.$$

on a en outre $\overline{Am}^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$

Substituant

$$n^2 = \frac{a^2+b^2-2ab\cos\theta-(a-b)^2}{4} = \frac{2ab(1-\cos\theta)}{4} = ab\sin^2\frac{\theta}{2}$$

alors

$$S = \frac{3V}{\pi\sqrt{ab}\,.\,\sin\frac{\theta}{2}}$$

Mais

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\theta$$

Donc

$$ab\sin\theta = \frac{6V}{\pi\sqrt{ab}\sin\frac{\theta}{2}}$$

Posons pour simplifier $V' = \frac{6V}{\pi\sin\frac{\theta}{2}}$ quantité constante. Le problème est ramené à celui-ci : chercher le lieu des intersections successives de la droite $ay + bx = ab$ qui se meut dans un angle θ sous la condition que les segments à l'origine, a et b, satisfassent à la relation

$$ab\sin\theta = \frac{V'}{\sqrt{ab}}$$

on a donc

$$ay + bx = ab \qquad ab\sin\theta = \frac{V'}{\sqrt{ab}}$$

et

$$a'y + b'x = a'b' \qquad a'b'\sin\theta = \frac{V'}{\sqrt{a'b'}}$$

pour une autre position. — Retranchons ces équations l'une de l'autre, après avoir élevé les secondes au carré.

$$(a-a')y + (b-b')x = a(b-b') + b'(a-a') \quad \text{d'où} \quad \frac{a-a'}{b-b'} = -\frac{x-a}{y-b'}$$

$$\sin^2\theta\left[a^3(b^3-b'^3) + b'^3(a^3-a'^3)\right] = 0 \quad \text{d'où} \quad a^3(b-b')(b^2+bb'+b'^2) + b'^3(a-a')(a^2+aa'+a'^2) = 0$$

d'où

$$\frac{a-a'}{b-b'} = -\frac{a^3(b^2+bb'+b'^2)}{b'^3(a^2+aa'+a'^2)}$$

Par conséquent

$$\frac{x-a}{y-b'} = \frac{a^3(b^2+bb'+b'^2)}{b'^3(a^2+aa'+a'^2)}$$

faisant $a = a'$, $b = b'$ on a l'éq. de continuité

$$\frac{x-a}{y-b} = \frac{a}{b}$$

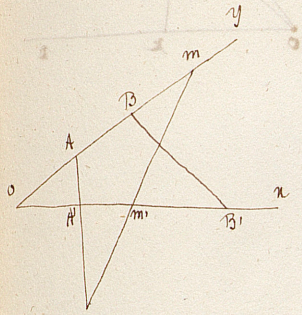
ou

$$ay + bx = 0$$

Il s'agit d'éliminer a et b entre cette Eq. celle de la droite $ay + bx = ab$ et celle de condition $ab\sin\theta = \frac{V'}{\sqrt{ab}}$.

On trouve
$$xy = \frac{1}{4}\left(\frac{V'^2}{\sin^2\theta}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Eq. d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes. — La surface de révolution est donc un hyperboloïde.



387. On coupe par une droite mm' un quadrilatère $AA'BB'$, de telle manière que
$$\frac{mA \cdot m'B'}{mB \cdot m'A'} = \lambda$$
on demande l'enveloppe de mm'.

Soient a b a' b' les longueurs OA OB OA' OB'. et $m = Om$, $m' = Om'$. L'Eq. de mm' sera
$$m'y + mx = mm'$$
avec la condition
$$\frac{m-a}{m-b} \cdot \frac{b'-m'}{m'-a'} = \lambda \quad \text{ou} \quad (\lambda+1)mm' - m'(\lambda b + a) - m(\lambda a' + b') + \lambda a'b + ab' = 0$$

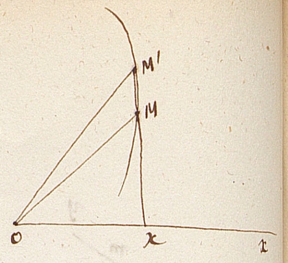
J'élimine m'. J'ai alors
$$0 = m^2\left[(\lambda+1)x - (\lambda a' + b')\right] - m\left[x(\lambda b + a) - y(\lambda a' + b') - (\lambda a'b + ab')\right] - \left[\lambda a'b + ab'\right]y$$

Pour avoir le lieu, j'exprime que les deux valeurs de m qu'on tirerait de cette Eq. sont égales : ce qui me donne, en développant et ordonnant
$$\left.\begin{aligned} &y^2(\lambda a' + b')^2 - 2xy\left[(\lambda b + a)(\lambda a' + b') - 2(\lambda+1)(\lambda b'b + ab')\right] + x^2(\lambda b - a)^2 \\ &\quad - 2x(\lambda b + a)(\lambda a'b + ab') - 2y(\lambda a' + b')(\lambda a'b + ab') + (\lambda a'b + ab')^2 \end{aligned}\right\} = 0$$

Eq. d'une conique tangente aux quatre côtés du quadrilatère. — On voit de suite qu'elle est tangente aux deux axes ; car, en faisant x ou y nul, l'Eq. résultante en y ou x a ses deux racines égales. Quant aux deux autres côtés du quadrilatère, on vérifie aussi avec facilité, mais un peu longuement, qu'ils sont tangents à la courbe.

Il est évident qu'on aurait la même courbe si l'on remplaçait les segments mA mB $m'A'$ $m'B'$

par les distances des sommets du quadrilatère à la transversale mm'.



388. Déterminer la tangente aux courbes polaires. — Proposons-nous de déterminer l'angle que fait la tangente au point M avec le rayon vecteur OM, en considérant cette tangente comme la limite des positions successives de la sécante M'M, lorsque le point M' se rapproche de M jusqu'à coïncider avec lui.

Soient ρ et ρ' les rayons vecteurs OM et OM', ω et ω' les angles MOx et M'Ox, et α et α' les angles OMx et OM'x. — Le triangle OMM' donne

$$\rho' : \rho :: \sin\alpha : \sin\alpha'$$

D'où

$$\rho'+\rho : \rho'-\rho :: \sin\alpha+\sin\alpha' : \sin\alpha-\sin\alpha'$$
$$:: \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\alpha')$$
$$:: \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\omega'-\omega)$$

car $\omega'-\omega = \alpha-\alpha'$.

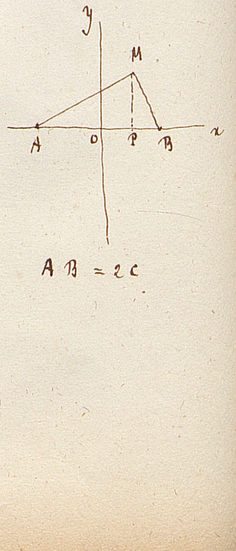
De là

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha+\alpha') = \frac{(\rho'+\rho)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}{\rho'-\rho} = \frac{\rho'+\rho}{2}\,\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}{\frac{1}{2}(\omega'-\omega)}\,\frac{\omega'-\omega}{\rho'-\rho}$$

Si le point M' se rapproche indéfiniment de M, on aura donc

$$\operatorname{tg}\alpha = \rho \lim \frac{\omega'-\omega}{\rho'-\rho}$$

389. **Lemniscate.** — Lieu des points dont le produit des distances à deux points fixes est constant.



AB = 2c

$$\left[y^2+(x-c)^2\right]\left[y^2+(x+c)^2\right] = a^4$$

ou

$$y^4+2(x^2+c^2)y^2+(x^2-c^2)^2-a^4=0$$

D'où

$$y = \pm\sqrt{-(x^2+c^2)\pm\sqrt{a^4+4c^2x^2}}$$

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des x. De plus la valeur négative du second radical ne donne que des valeurs imaginaires d'y; il nous suffit donc de discuter la fonction $y=\sqrt{-(x^2+c^2)+\sqrt{a^4+4c^2x^2}}$.

Mais x est compris entre certaines limites. car, pour que y soit réel, il faut que l'on ait

$$a^4 + 4c^2x^2 > (x^2+c^2)^2 \quad \text{ou bien} \quad (x^2-c^2)^2 - a^4 < 0$$

ce qui peut s'écrire

$$(x^2-c^2-a^2)(x^2-c^2+a^2) < 0.$$

Il faut donc que l'on ait

$$\begin{cases} x^2-c^2-a^2 > 0 \\ x^2-c^2+a^2 < 0 \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad \begin{cases} x^2-c^2-a^2 < 0 \\ x^2-c^2+a^2 > 0 \end{cases}$$

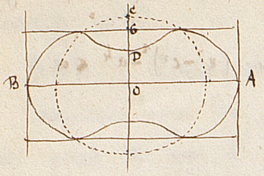
Le 1er système est évidemt. absurde. — Prenons donc le second. on voit que le maximum de x est $\sqrt{a^2+c^2}$ et son minimum $\sqrt{c^2-a^2}$. Il se présente alors trois cas, suivant que $a > c$, $a = c$, $a < c$.

1°. $a > c$. — x peut alors varier à partir de zéro. Pour $x = 0$ on a $y^2 = a^2 - c^2$. Menons donc $OD = \sqrt{a^2-c^2}$, la courbe coupera l'axe des y en ce point. Pour savoir ce que devient y lorsqu'on fait croître x, cherchons le maximum de l'ordonnée. Je résous par rapport à x.

$$x^2 = y^2 - c^2 \pm \sqrt{(a^2-2cy)(a^2+2cy)}$$

on voit alors que la valeur maxima de y est $y = \frac{a^2}{2c}$, à laquelle correspond $x = \frac{\sqrt{4c^4-a^4}}{2c}$. Cette valeur de x est différente de $\sqrt{c^2-a^2}$ et elle est réelle toutes les fois que $a < c\sqrt{2}$. Il faut donc en conclure que, si a est compris entre c et $c\sqrt{2}$, à mesure que x augmente, l'ordonnée augmente jusqu'à $\frac{a^2}{2c}$, puis diminue, et tend vers la limite 0 qu'elle atteint pour $x^2 = a^2 + c^2$. — Le point dont l'ordonnée est maxima est facile à construire. car il se trouve sur une parallèle à l'axe des x à une distance $\frac{a^2}{2c}$, et de plus sur un cercle dont le centre est à l'origine et dont le rayon est égal à c. car on a $x^2 + y^2 = \frac{a^4}{4c^2} + \frac{4c^4 - a^4}{4c^2} = c^2$. — ainsi, dans

le cas $a < c\sqrt{2}$, la courbe a la forme indiquée ici



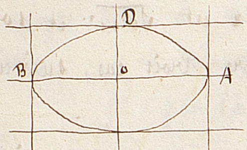
$OD = \sqrt{a^2 - c^2}$

$OA = OB = \sqrt{a^2 + c^2}$

$OC = c$

$OG = \frac{a^2}{2c}$

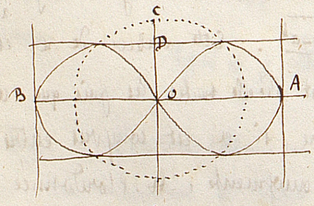
Lorsque a est $> c\sqrt{2}$, le maximum de y correspond à une abscisse imaginaire : l'ordonnée décroît donc d'une manière continue depuis $\sqrt{a^2-c^2}$ jusqu'à zéro, et la courbe prend cette forme



$OD = \sqrt{a^2 - c^2}$

$OA = OB = \sqrt{a^2 + c^2}$

2°. $a = c$. Dans cette hypothèse, la valeur de y qui correspond à $x = 0$ est également nulle. La courbe passe donc à l'origine. En faisant croître x, y croîtra aussi jusqu'à son maximum, où il devient égal à c. L'abscisse correspondante sera $x = \sqrt{\frac{3c^4}{4c^2}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. À partir de là, y diminue, et devient nul pour $x = \sqrt{a^2+c^2} = c\sqrt{2}$. La forme de la courbe sera donc celle-ci

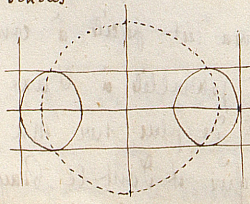


$OA = OB = c\sqrt{2}$

$OD = \frac{c}{2}$

$OC = c = 2OD$

3°. $a < c$. Dans ce cas, y n'est réel qu'autant que x atteint ou dépasse la valeur $\sqrt{c^2 - a^2}$: on aura alors la courbe ci-dessous



Enfin nous remarquerons que le coefficient angulaire de la tgte étant

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{x(x^2+y^2-c^2)}{y(x^2-y^2-c^2)}$$

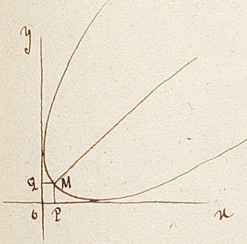
Si l'on suppose $y=0$, $x=\sqrt{a^2+c^2}$, ce coeff. devient ∞ : donc la tgte aux points A et B est perp. à l'axe des x. Si $x=0$, $y=\sqrt{a^2-c^2}$, il devient nul, aussi bien que quand $x^2+y^2-c^2=0$, c.à.d. aux points maximum.

Enfin dans le second cas nous avons à déterminer la tangente à l'origine. On a alors $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0}{0}$. Pour lever l'indétermination, remplaçons y par sa valeur

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x\left(2c^2+\sqrt{c^4-4c^2x^2}\right)}{\left[2x^2-\sqrt{c^4-4c^2x^2}\right]\sqrt{-(x^2+c^2)+\sqrt{c^4-4c^2x^2}}}$$

Puis multipliant haut et bas par $\sqrt{-(x^2+c^2)-\sqrt{c^4-4c^2x^2}}$, on trouve $\operatorname{tg}\alpha = 1$ pour $x=0$.

390. Lieu décrit par le sommet d'une parabole qui roule dans un angle droit.



Si l'on suppose la courbe rapportée à ses axes ordinaires, dans une position particulière, les éq. des tgtes rectangulaires seront

$$y = mx + \frac{p}{2m} \qquad y = -\frac{1}{m}x - \frac{pm}{2}$$

Par suite les distances MP, MQ du sommet dont les coordonnées sont $x=0$ $y=0$, sont

$$MP = \frac{-\frac{p}{2m}}{\sqrt{1+m^2}} \qquad MQ = \frac{\frac{pm}{2}}{\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}$$

Il suffit donc d'éliminer m entre les deux éq.

$$x = \frac{-p}{2m\sqrt{1+m^2}} \qquad y = \frac{pm^2}{2\sqrt{1+m^2}}$$

En divisant $\quad \frac{y}{x} = m^3 \qquad m = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$

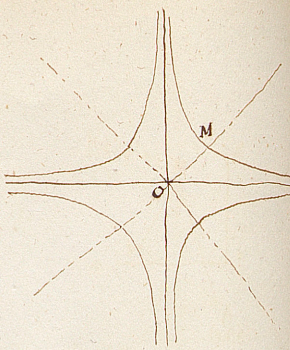
D'où

$$4\,y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right) = p^2$$

Pour construire cette courbe, on remarquera d'abord qu'elle est symétrique par rapport aux axes de coordonnées, et par rapport aux bissectrices de ces

axes. Pour $x=0$, y est infini. Puis l'ordonnée décroît à mesure que l'abscisse devient plus grande, et au point de rencontre avec la bissectrice OM, c.a.d. quand $y=x$, on trouve

$$8y^2=p^2 \qquad y=\pm\frac{p}{2\sqrt{2}}$$



de sorte que $OM=\frac{p}{2}$, ou $\frac{1}{2}$ du paramètre de la parabole donnée. — Ce point M est le sommet de la parabole lorsque l'axe de celle-ci coïncide avec la bissectrice : le point O, qui appartient à la directrice, est donc bien à une distance $\frac{p}{2}$ de ce sommet. — Au-dessous de la bissectrice, la courbe est symétrique de la branche au-dessus, et par conséquent les deux axes sont asymptotes. On voit facilement dans quel cas le sommet de la courbe se trouve sur l'un des axes : c'est quand son axe est parallèle à l'autre axe de coordonnées, et par conséquent est situé à une distance infinie de celui-ci : car on sait que la parabole a deux tangentes parallèles à son axe et situées à une distance infinie. — Il est aisé de reconnaître que la tangente à la courbe au point M est perp. à la bissectrice. En effet le coefficient angulaire de la tangente est $-\frac{X'}{Y'}$ et X' et Y' sont symétriques par rapport à x et à y. Donc, pour ~~x et~~ $x=y$, $X'=Y'$, et le coeff. ang. devient égal à -1.

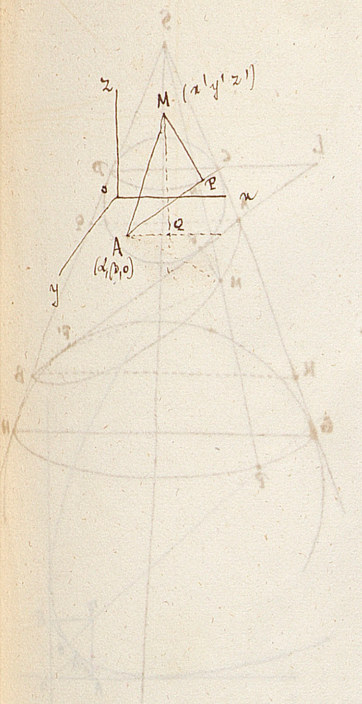
391. D'un point fixe, on mène des tangentes à une parabole qui se meut suivant son axe : on demande le lieu des points de contact.

Soient α β les coord. du point de contact fixe, rapportées à une position particulière de la parabole, pour laquelle l'Eq. de cette courbe est $y^2=2px$. Lorsque le sommet de la parabole se sera avancé d'une quantité a, l'Eq. de la courbe sera $y^2=2p(x-a)$, et celle de la corde de contact $yy'=p(x+x'-2a)$, y' et x' étant les coordonnées du point d'où les tangentes sont issues. Donc dans le cas actuel, elle sera $\beta y=p(x+\alpha-2a)$. Et il suffit, pour avoir l'Eq. du lieu, d'éliminer a entre les deux Eq. $y^2=2p(x-a)$, $\beta y=p(x+\alpha-2a)$

ce qui donne $y^2 - px - \beta y + p\alpha = 0$

parabole passant par le point $\alpha\,\beta$.

392. Déterminer la longueur de la perp. abaissée d'un point $x'y'z'$ sur une droite $x = az + \alpha \quad y = bz + \beta$



Le triangle rectangle AMP donne

$$\overline{MP}^2 = \overline{MA}^2 - \overline{AP}^2$$

or $\overline{AP}^2 = \overline{MA}^2 \cos^2 MAP$. — Et, si nous appelons $\alpha\,\beta\,\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ les angles que font avec les axes les droites AP et AM

$$\cos MAP = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'.$$

AQ parallèle à Ox : alors $MAQ = \alpha'$, et $\cos\alpha' = \frac{AQ}{AM} = \frac{x'-\alpha}{l}$. De même $\cos\beta' = \frac{y'-\beta}{l}$, $\cos\gamma' = \frac{z'}{l}$. D'autre part, a et b étant les coeff. angul. des projections de AP, on sait que

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \qquad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+1}} \qquad \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}$$

Donc

$$\cos MAP = \frac{a(x'-\alpha) + b(y'-\beta) + z'}{l\sqrt{a^2+b^2+1}} \quad \text{et} \quad l^2\cos^2 MAP = \frac{\left[a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'\right]^2}{a^2+b^2+1}$$

D'un autre côté

$$\overline{MA}^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + z'^2$$

ce qui donne enfin

$$\overline{MP}^2 = (x'-\alpha)^2 + (y'-\beta)^2 + z'^2 - \frac{\left[a(x'-\alpha)+b(y'-\beta)+z'\right]^2}{a^2+b^2+1}$$

393. Lieu engendré par une droite qui tourne perpendiculairem^t. à une autre.

$x'y'z'$ le point commun. — Les éq. des deux droites :

$$x - x' = a(z-z') \qquad x - x' = a'(z-z')$$
$$y - y' = b(z-z') \qquad y - y' = b'(z-z')$$
$$aa' + bb' + 1 = 0$$

Elim. a' et b' entre les 3 dernières :

$$a(x'-x) + b(y'-y) + z'-z = 0$$

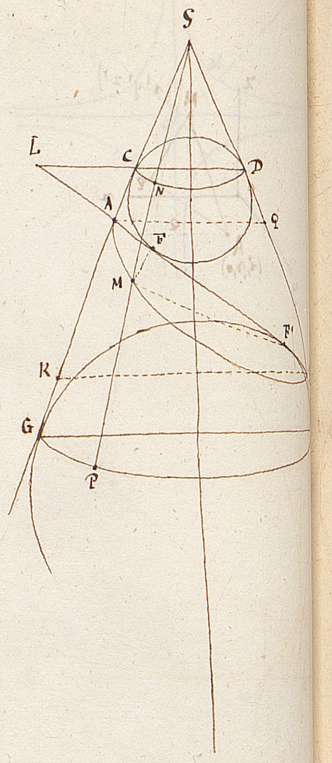
394. On trouve de même le lieu engendré par une droite qui se meut parallèlem^t. à elle-même en s'ap.

-puyant sur une droite fixe $x = az + \alpha$, $y = bz + \beta$. — La droite mobile étant $x = a'z + \alpha'$ $y = b'z + \beta'$ on trouve

$$(x - a'z - \alpha)(b - b') - (y - b'z - \beta)(\alpha - a') = 0.$$

395. Sections coniques. Démonstrations Géométriques.—

Supposons d'abord que la droite AB rencontre les deux généra-trices d'une même nappe, et soit M un point de la courbe d'intersection. J'inscris et j'ex-inscris au triangle SAB les deux cercles CFD et GF'H qui touchent AB en F et F'. Je joins MF, MF' : MF + MF' est constant.



En effet MF = MN, MF' = MP. Donc MF + MF' = NP = CG = Const. Donc la courbe est une ellipse dont F et F' sont les foyers. Le grand axe est AB : car AB = CG et en outre AF = F'B. Démontrons d'abord cette dernière égalité. On a SB + BF' = SA + AF', et SD = SC. Retranchons BD + F'B = AC + AF', or BD = BF, donc en retranchant BF' = AC + AF' - BF = 2AF - BF'. Donc BF' = AF. — Maintenant AF' = AG = FB : donc AB = GC. Donc AB est le grand axe de l'ellipse.

En outre, si l'on mène AQ et KB perp. à l'axe du cône, la distance AK = BQ est égale à l'excentricité FF'. En effet AF' = AG, KG = AF. Donc AF' - AF ou FF' = AG - KG ou AK.

Enfin le point de rencontre L de la corde de contact du cercle inscrit, avec l'axe, est un point de la direc-trice. En effet les triangles ACL et AKB donnent

AL : AB :: AC : AK
:: AF : AK

$$\frac{AL}{AF} = \frac{AB}{AK} = \frac{a}{c}.$$

(chercher les constructions analogues pour l'Hyperbole et la parabole.)

396. À une ellipse rapportée à son centre et à ses axes on mène une tangente, et par les points d'intersec-tion de celle-ci avec les axes on mène des parallèles aux axes : on demande le lieu des points de concours.

on arrive immédiatem^t. en éliminant x' et y' entre les trois Eq.

$$y' = \frac{b^2}{y} \qquad x' = \frac{a^2}{x} \qquad a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$$

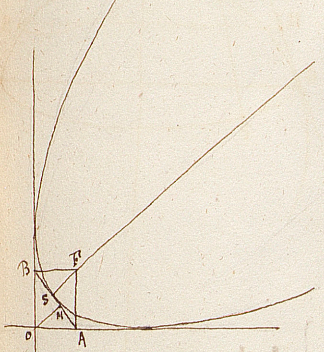
à l'Eq. du lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 = x^2y^2$$

Si l'ellipse devient un cercle, $a = b$: donc le lieu devient

$$a^2(x^2+y^2) = x^2y^2 \qquad \left[\rho = \frac{2a}{\sin 2\theta}\right]$$

or il est remarquable que ce lieu n'est autre que celui des foyers d'une parabole dont le paramètre serait $4a$, roulant dans un angle droit : et il est facile de démontrer l'identité de ces deux lieux. Soit en effet la parabole dans une position particulière, et F son foyer. Si de ce point nous abaissons des perp. sur les axes de coord., ceux-ci étant tangents à la courbe, on sait que les points A et B appartiennent à la tangente au sommet de la courbe.



Maintenant, menons des points O et F deux perp. à cette tangente : elles seront égales : et, comme FS est constant et égal à a, OM est aussi constant. D'où il suit que si du point O comme centre, avec a pour rayon, on décrit un cercle, les tangentes à ce cercle seront les tangentes au sommet de la parabole dans ses diverses positions, et par suite le foyer de cette parabole sera le point de concours des perp. FA et FB.

---

397. Lemme. Soient A, B, C, les angles, a, b, c les côtés, S l'aire d'un triangle. On a

$$4S(\cot A + \cot B + \cot C) = a^2 + b^2 + c^2$$

Car on a $a^2 = b^2 + c^2 - 4S\cot A$, et deux Eq. semblables : en les ajoutant, on a le th.

Théorème. Sur chaque côté du triangle ABC on construit extérieurement un carré. Soient A', B', C' les centres des carrés construits sur BC, AC, AB. On aura la relation

$$\frac{\text{aire } A'B'C'}{\text{aire } ABC} = 1 + \frac{1}{2}\left(\cot A + \cot B + \cot C\right)$$

En effet : — l'aire de l'Hexagone $AC'BA'CB'$ est évidemment $\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) + S$. on a $AC' = \frac{c}{\sqrt{2}}$, $AB' = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$C'AB' = \frac{\pi}{2} + A$: donc l'aire du triangle $C'AB'$ est égale à $\frac{bc}{4}\cos A = \frac{S}{2}\cot A$; de même

aire $B'CA' = \frac{S}{2}\cot C$; $A'BC' = \frac{S}{2}\cot B$

Donc

aire $A'B'C' = \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2) + S - \frac{1}{2}S(\cot A + \cot B + \cot C)$

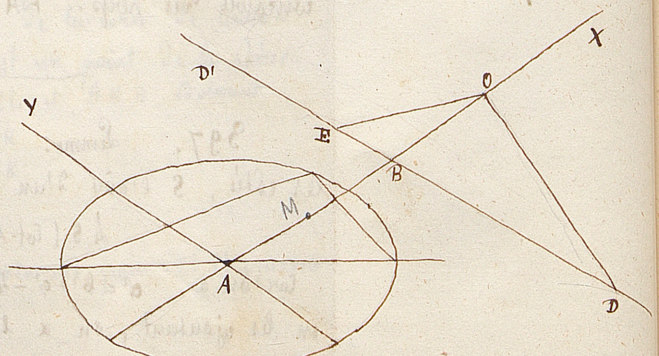
et, d'après le lemme,

aire $A'B'C' = S\left[1 + \frac{1}{2}(\cot A + \cot B + \cot C)\right]$

Corollaire immédiat. Si l'on construit extérieurement un carré sur chaque côté d'un triangle rectangle, l'aire du triangle qui a pour sommets les centres des trois carrés est égale au carré formé sur la demi-somme des côtés de l'angle droit.

398. Le produit des rayons vecteurs aboutissant à un point qcq. de l'ellipse ou de l'hyperbole est égal au carré du $\frac{1}{2}$ diam. conj. à celui qui passe par ce point. } facile.

399. Toutes les circonf. circonscrites aux triangles formés par des systèmes de droites conjuguées passant par un même point pris sur le plan d'une ellipse, et par une droite parallèle au diamètre conjugué du diamètre qui passe par le point O, se coupent en un même point situé sur le diamètre qui passe par le point O.



En effet soit A le centre de l'ellipse, prenons AO et

son conjugué pour axes coord. L'éq. de la courbe sera

$$a'^2 y^2 + b'^2 x^2 = a'^2 b'^2$$

Soit DD' la parallèle à l'axe des y. Posons

$$OA = d \quad \text{et} \quad AB = p$$

Soit $y = m(x-d)$ l'éq. de OE. Celle de OD sera

$$y = -\frac{b'^2}{a'^2 m}(x-d)$$

Remplaçons dans ces éq. $x - d$ par $-q = OB$, il viendra

$$BE = -mq \qquad BD = \frac{b'^2}{a'^2 m} q$$

donc

$$EB \cdot BD = \frac{b'^2}{a'^2} q^2$$

Soit M le point où le cercle (E, O, D) rencontre OA. Nous avons

$$MB \cdot BO = BE \cdot BD.$$

En remplaçant ces quantités par leurs valeurs, nous trouvons

$$MB = \frac{b'^2}{a'^2} q$$

MB est constant, cqfd.

Tous ces cercles ayant une corde commune MO, il s'ensuit que le lieu de leurs centres est la perp. élevée sur le milieu de MO.

Si l'on place le point O au centre, et qu'en même temps on prenne la directrice pour la ligne DD', on trouve alors que le point M est situé sur le grand axe, à une distance de la directrice troisième proport. à l'exc. et au $\frac{1}{2}$ pet. axe : et le lieu des centres devient une perp. au grand axe menée à une distance du centre égale à $\frac{b^2}{2c}$. De là :

Th. Si d'un point qcq. de la perp. au gr. axe menée à une distance du centre $= \frac{b^2}{2c}$, on décrit une circonf. passant par le centre de l'ellipse, cette circ. coupera la directrice en deux points tels qu'en les joi-

-gnant au centre, on aura un système de diam. conj.

L'Hyperbole jouit des mêmes propriétés.

400. Dans tout triangle ABC, j'ai

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C+2\sin B\sin C\cos A+2\sin C\sin A\cos B$$

Soit R le rayon du cercle circonscrit, on a

$$a=2R\sin A \quad b=2R\sin B \quad c=2R\sin C$$

or

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Donc

$$\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$$

et deux Eq. analogues. En les ajoutant .... cqfd.

401. Lemme. Le carré de la distance du centre d'une ellipse à une tangente, diminué du carré de la distance du même centre à une parallèle à cette tangente menée par un foyer, est égal au carré du demi petit axe.

Th. Le lieu géom. du sommet d'un angle droit circonscrit à deux Ellipses homofocales est un cercle concentrique aux 2 Ellipses.

Soient O et F le centre et F un foyer commun, P la projection de O sur une tgte à la 1ère Ellipse, et P' la proj. de O sur une droite tgte à la seconde Ellipse et et perp. à la 1ère tgte: Q et Q' les proj. du foyer F sur OP et OP'. D'après le lemme, on a

$$\overline{OP}^2-\overline{OQ}^2=b^2 \qquad \overline{OP'}^2-\overline{OQ'}^2=b'^2$$

d'où

$$\overline{OP}^2+\overline{OP'}^2-(\overline{OQ}^2+\overline{OQ'}^2)=b^2+b'^2$$

Mais $\overline{OQ}^2+\overline{OQ'}^2=\overline{OF}^2=c^2$. Donc

$$\overline{OP}^2+\overline{OP'}^2=b^2+b'^2+c^2$$

Donc l'intersection des deux tangentes est sur une circ. ayant pour centre celui des Ellipses et pour rayon la racine carrée de $b^2+b'^2+c^2$.

Ce Th. se démontre aisémt. par le calcul: il est également vrai pour l'hyperbole: — pour la parabole, on a une droite. —

402. Th. La différence des cubes de deux nombres consécutifs est égale à la somme de 4 carrés, dont 3 sont égaux.

Car on a identiquement.

$$(2n+1)^3 - (2n)^3 = (3n+1)^2 + 3n^2$$

$$(2n)^3 - (2n-1)^3 = (3n-1)^2 + 3n^2$$

Lemme. Le produit des deux facteurs

$$x^2 + my^2 \qquad t^2 + mu^2$$

est de la même forme quadratique.

Car

$$x^2 + my^2 = (x + y\sqrt{-m})(x - y\sqrt{-m})$$

$$t^2 + mu^2 = (t + u\sqrt{-m})(t - u\sqrt{-m})$$

$$(x + y\sqrt{-m})(t + u\sqrt{-m}) = tx - muy + \sqrt{-m}\,(ux + ty)$$

$$(x - y\sqrt{-m})(t - u\sqrt{-m}) = tx - muy - \sqrt{-m}\,(ux + ty)$$

Donc $$(x^2 + my^2)(t^2 + mu^2) = (tx - muy)^2 + m(ux + ty)^2$$

Th. Lorsque tous les facteurs d'un produit sont les différences des cubes de deux nombres consécutifs, le produit est égal à 4 carrés, dont 3 sont égaux. — Évid^t.

403. On donne sur une circ. deux points fixes A et B et un arc PQ de longueur constante, mais dont les extrémités P, Q, se déplacent sur la circonférence. Trouver le lieu des rencontres des droites AQ et BQ (2 cercles).

404. Lieu des centres des cercles passant par un point et interceptant sur une droite une corde de longueur donnée. (Parabole).

405. Résoudre $\sin x \cdot \sin(x+\alpha) = K$. Quelle relation entre les deux racines? — $\left|\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\cos(2x+\alpha) = K \quad \cos(2x+\alpha) = \cos\alpha + 2K\right.$.

406. Construire $xy^2 - yx^2 = 1$ (3 asympt. et un diam. passant par l'origine).

407. Construire, avec la règle et le compas, les angles

140

x et y : $\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{m}{n}$ $x+y = \alpha$.

408. Lieu des centres des Ellipses ayant un foyer commun et tangentes à deux droites données (une droite).

409. Ramener l'Eq. de la parabole à la forme

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = a \qquad (\alpha)$$

410. $F(x)=0$ est une Eq. algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales : démontrer qu'en égalant à zéro la dérivée seconde de $\frac{1}{F(x)}$ on obtient une Eq. dont toutes les racines sont imaginaires.

411. Soient A A_1 A_2 les sommets d'un triangle, et O un point dans le plan du triangle : en O on élève à OA une perp. qui va rencontrer le côté opposé A_1A_2 en B. On détermine de même B_1 sur AA_2 et B_2 sur AA_1. Les 3 points B, B_1, B_2 sont en ligne droite.

appelons $\delta, \delta_1, \delta_2$ les lignes OA, OA_1, OA_2,

p, p_1, p_2 les perp. abaissées de O sur les côtés opposés aux sommets A, A_1, A_2. (et $\delta', \delta'_1, \delta'_2$; OB, OB_1, OB_2)

Dans les deux triangles AOB_2, BOA_2, les angles AOB_2, BOA_2 sont supplémentaires, comme ayant leurs côtés perp : ce qui donne

$$\frac{AB_2 \cdot p_2}{BA_2 \cdot p} = \frac{\delta \delta'_2}{\delta_2 \delta'}$$

de même

$$\frac{A_1B \cdot p}{AB_1 \cdot p_1} = \frac{\delta_1 \delta'}{\delta \delta'_1}$$

$$\frac{A_2B_1 \cdot p_1}{A_1B_2 \cdot p_2} = \frac{\delta_2 \delta'_1}{\delta_1 \delta'_2}$$

d'où

$$AB_2 \cdot A_1B \cdot A_2B_1 = BA_2 \cdot B_1A \cdot B_2A_1$$

Donc ... cqfd.

412. On donne un cercle et une corde AB dans

(α) Il suffit de prendre pour axes deux tangentes issues d'un même point de l'axe de la parabole.

ce cercle. Du centre C on mène un Rayon CD qui coupe la corde ou son prolongement en F. Trouver le lieu des points M, milieux des Segments FD. Donner à priori les Tangentes en A et en B.

413. Etant données 2 Droites dans l'Espace, déterminer le plan sur lequel leurs projections formeraient un parallélogramme. — Voir 1537.

414. Par le foyer d'une Ellipse on mène 3 rayons vecteurs formant deux à deux un angle de 120°. On a
$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} + \frac{1}{R''} = $ Const.

415. Démontrer que
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$
{ fausse, car le 1er membre est >1 et $\frac{n+1}{2n+3} < 1$ }

(Si c'est vrai pour n, id. pour $n+1$)

416. Eq. de la courbe qui coupe en moyenne et extrême Raison toutes les cordes parallèles d'une parabole. — Résolu, 1550.

417. Lieu des intersections des 3 hauteurs dans les triangles ayant même Base et même angle au Sommet (Evid. un cercle).

418. Condition de Relation entre les côtés d'un triangle pour ~~que~~ qu'un angle soit triple d'un autre.

419. L'Hyperbole est-elle la Seule courbe telle que les Segments de toute Sécante compris entre la courbe et les asymptotes soient égaux? (oui, car alors tous les Diam. sont Rectilignes.

420. Si dans $f(x)$ on Remplace x^n par $\mp a^n$, on a le Reste de la Division de $f(x)$ par $x^n \pm a^n$. (V. 1516)

421. Quelle est l'enveloppe d'une Droite dont la Somme des coordonnées à l'origine soit constante?

Lorsque la Relat. entre ces coord. est du 1er ou du

second degré, l'enveloppe est une conique.

422. Théorème. Si trois nombres entiers sont tels que le carré du plus grand soit égal à la somme des carrés des deux plus petits, le produit de ces trois nombres sera nécessairement divisible par 60.

Les trois nombres r, s, t, dans l'Eq. $r^2+s^2=t^2$ peuvent être supposés débarrassés de tout diviseur commun, car si l'on peut prouver que le produit des nombres ainsi réduits est un multiple de 60, la même conséquence s'étendra au produit des nombres primitifs. L'Eq. étant dans cet état, deux des nombres qui entrent dans notre Eq. seront impairs, et le troisième sera pair. Il est facile de voir que r et s ne sauraient être l'un et l'autre impairs. En effet comme tout carré impair est de la forme $8n+1$, la somme r^2+s^2 aurait dans ce cas la forme $8n+2$, qui ne saurait convenir au carré t^2. L'un des nombres r, s est donc pair. Supposons que ce soit r. Comme on a $r^2=t^2-s^2$, t^2 et s^2 étant des carrés impairs, et par conséquent de la forme $8n+1$, r^2 sera divisible par 8, et r par conséquent multiple de 4. Il est donc prouvé que l'un des nombres, r, s est divisible par 4.

On prouve avec la même facilité que l'un de ces nombres r, s est divisible par 3. Il suffit pour cela de remarquer que le carré de tout nombre non divisible par 3 étant de la forme $3n+1$, la somme r^2+s^2 aurait la forme $3n+2$ si aucun des nombres r, s n'était divisible par 3, tandis que le carré t^2 aurait la forme $3n+1$, ou serait divisible par 3.

Prouvons enfin que, des trois nombres r, s, t, l'un est toujours divisible par 5. C'est ce que nous allons faire en démontrant que si ni r ni s ne le sont, t le sera nécessairement.

Tout carré non divisible par 5 étant de l'une des formes $5n+1$, $5n+4$, il peut arriver 3 cas différents, lorsque r et s ne sont ni l'un ni l'autre divisibles par 5. Les carrés de ces nombres peuvent être l'un et l'autre de la forme $5n+1$, ou l'un et l'autre de la forme $5n+4$, ou enfin l'un de la forme $5n+1$, l'autre de la forme $5n+4$. Les deux premiers cas ne sauraient avoir lieu, car, dans le premier, r^2+s^2 aurait la forme $5n+2$, et, dans le second, la forme $5n+3$, qui ne sauraient convenir ni l'une ni l'autre au carré t^2. Il ne reste donc que le troisième cas, dans lequel t^2 sera de la forme $5n$, c.à.d. divisible par 5 : t est donc toujours divisible par 5, si ni r ni s ne le sont.

En réunissant ce qui précède, on voit que le produit rst est divisible par 4, par 3 et par 5, et comme 3, 4, 5 sont premiers entre eux, rst sera aussi un multiple du produit 3.4.5, ce qu'il s'agissait de prouver. (Journal de Crelle, 1830).

423. Théorème. Tout plan passant par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre quelconque, partage ce tétraèdre en deux parties équivalentes.

Soit ABCD un tétraèdre qcq. Soient E et F les milieux de deux arêtes opposées. Si par l'arête AD et le point E on fait passer un plan, ce plan, qui passe par le sommet A et qui divise la base BCD en deux parties équivalentes, partage aussi le tétraèdre en deux portions équiv. de même volume :

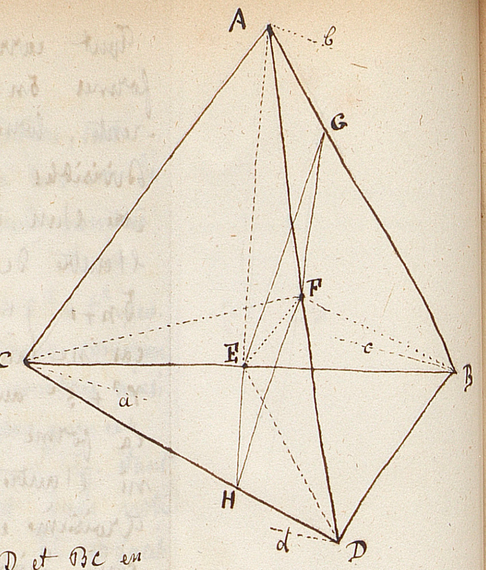
$$(1) \qquad ACDE = ABDE = \tfrac{1}{2}\cdot ABCD$$

Si l'on mène un plan par le point F et l'arête BC, on aura de même

$$(2) \qquad BCDF = ABCF = \tfrac{1}{2}\, ABCD$$

De (1) et (2) on tire

$$(3) \qquad ACDE = ABCF$$



Mais comme ACDE et ABCF ont une partie commune, le tétraèdre ACEF, on a

(4) CDEF = ABEF.

Maintenant, qu'on mène un plan qcq. EGFH par les points E et F, et que, des quatre sommets du tétraèdre, on abaisse sur ce plan les 4 perp. a, b, c, d : on aura

a . EFH + d . EFH = CDEF

b . EFG + c . EFG = ABEF

d'où, à cause de (4),

(5) (a+d) EFH = (b+c) EFG

Comme le plan EGFH coupe les arêtes AD et BC en leurs milieux, et que chacune de ces arêtes fait, de chaque côté de ce plan, des angles égaux avec lui, on a a = c et d = b, d'où il suit

(6) EFH = EFG

(7) d.EFH = b.EFG

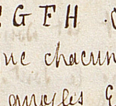
(8) DEFH = AEFG

et, à cause de (1)

(9) ACHEGF = BDHFGF c.q.f.d.

(id. id. en allem.)

424. Théorème. Si, dans un polygone convexe, on mène toutes les diagonales possibles, et qu'on les prolonge ~~toutes~~ les côtés indéfiniment, alors, en général, il y a, dans l'intérieur du polygone, juste moitié moins d'intersections de diagonales qu'il n'y en a à l'extérieur, de points de rencontre des côtés prolongés.

Evident :  donc ... $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$ pour l'intérieur.

425. On donne, d'une pyramide triangulaire, trois arêtes concourantes. Déterminer la face opposée de manière que le volume de la pyramide soit maxi-

-mum.

Les trois arêtes doivent former un trièdre tri-rectangle. Car alors deux d'entre elles déterminent la base, et la 3e. la hauteur de la pyramide, et ces deux éléments sont tous deux maxima dans cette circonstance. — Soient a, b, c ces trois arêtes : la base opposée aura alors pour surface $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}$.

426. Si, à une courbe algébrique, on mène autant de tangentes parallèles que possible, et que, suivant toutes ces tangentes, on applique des forces égales, la résultante de toutes ces forces passe par un point fixe quand leur direction commune vient à changer (Plücker). — Il y a qq. autres théorèmes analogues.

427. Si sur les trois diagonales d'un quadrilatère complet comme diamètres, on décrit des ellipses semblables et semblablemt. placées, ces trois ellipses se coupent en un seul et même point.

---

428. Démonstrations nouvelles de qq. théor. relatifs aux nombres (Crelle 1828, Lej. Dirichlet).

Parmi les différentes démonstrations que les géomètres ont successivemt. données du théorème de Wilson, celle que M. Gauss a exposée dans ses « Disq. arithm. art. 77 » et qui est fondée sur la considération des nombres correspondants (numeri socii) est sans contredit la plus simple. En généralisant un peu la définition des nombres correspondants, et en suivant ensuite une marche analogue à celle de Mr. Gauss, on peut démontrer simultanément le th. de Wilson et deux autres propositions qui sont d'un grand usage dans la théorie des nombres. C'est ce que nous allons faire voir en peu de mots.

La lettre p désignant un nombre premier, Euler, qui le premier s'est servi de cette considération, nomme

correspondants deux nombres m et n l'un et l'autre moindres que p, et tels que leur produit mn donne l'unité pour reste lorsqu'il est divisé par p.

Généralisons cette définition, et appelons correspondants deux nombres m et n moindres que p, et dont le produit mn donne le même reste qu'un nombre déterminé a que nous supposerons n'être pas divisible par p. — Cela posé, considérons la suite

$$(1) \qquad 1, 2, 3, \ldots (p-1)$$

Il est facile de voir que, si m désigne l'un qcq. des nombres qui composent cette suite, ce nombre m aura son correspondant n, et n'en aura qu'un. Cela résulte immédiatem^t^ de ce que la congruence $my \equiv a \pmod{p}$ dans laquelle ni m ni a n'est divisible par p, a toujours une racine y moindre que p et n'en a qu'une.

Il peut arriver que n soit égal à m. On a alors $m^2 \equiv a \pmod{p}$, ce qui fait voir que ce cas ne peut avoir lieu qu'autant qu'il existe un carré donnant le même reste que a, ou, en d'autres termes, qu'autant que a est résidu quadratique par rapport à p. Distinguons actuellement deux cas selon que a est ou n'est pas résidu quadratique par rapport à p, et commençons par le dernier de ces deux cas.

Soit, dans ce cas, m l'un qcq. des nombres (1) et n son correspondant. On aura $mn \equiv a \pmod{p}$ et n sera différent de m. Après avoir ôté les nombres m, n de la suite (1), il restera $p-3$ nombres. Désignons par m' l'un qcq. de ces $p-3$ nombres restants, et par n' son correspondant; n' sera différent de m', et l'on aura $m'n' \equiv a \pmod{p}$. En continuant de procéder ainsi, on épuisera la suite (1), et l'on formera $\frac{p-1}{2}$ groupes composés chacun de deux nombres correspondants: car chaque nombre n'ayant qu'un correspondant qui est mis de côté en même temps que lui,

on ne peut jamais, pour former un nouveau groupe, avoir besoin d'un des nombres déjà mis de côté.

Le produit de deux nombres composant un groupe donnant le même reste que a, et les groupes étant au nombre de $\frac{p-1}{2}$, on voit que le produit des nombres dont l'ensemble des groupes est formé, c.a.d. le produit des nombres compris dans la série (1) donne le même reste que le nombre a élevé à la puissance $\frac{p-1}{2}$. On a donc, dans le cas que nous venons d'examiner,

$$(2) \qquad 1.2.3.\dots(p-1) \equiv a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}$$

Passons au second cas, qui a lieu lorsque a est résidu quadratique de p. Il existe dans ce cas un carré k^2 (dont la racine k peut être supposée $< p$) tel que $k^2 \equiv a \pmod{p}$. Le carré du nombre $p-k$ qui est égalem^t. moindre que p, donne aussi le même reste que a lorsqu'il est divisé par p. Les nombres k et $p-k$ étant ôtés de la suite (1), il n'y restera aucun nombre x tel que $x^2 \equiv a \pmod{p}$. Car si, parmi les nombres restants, il y en avait un satisfaisant à cette condition, $x^2 - k^2 = (x-k)(x+k)$ serait divisible par p: il faudrait donc qu'un des facteurs $x+k$, $x-k$ le fût pareillement: or c'est ce qui est manifestem^t. impossible, x étant $< p$ et différent de k et $p-k$. — cela posé, on voit comme dans le cas déjà examiné, que les $p-3$ nombres qui restent dans la suite (1), après qu'on en a ôté k et $p-k$, se correspondent deux à deux, d'où l'on conclut comme précédemment que le produit de ces nombres donne le même ~~nombre~~ reste que $a^{\frac{p-3}{2}}$. Il suit de là que le produit de tous les nombres qui composent la suite (1) donne le même reste que $a^{\frac{p-3}{2}} k(p-k)$ et comme, d'après ce qu'on a vu plus haut, on a $k(p-k) \equiv -k^2 \equiv -a \pmod{p}$, il vient ce résultat

$$1.2.3\dots(p-1) \equiv -a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

Ce résultat et celui que nous avons obtenu plus haut

peuvent être réunis dans la formule suivante

$$(3) \qquad 1.2.3\ldots(p-1) \equiv \mp a^{\frac{p-1}{2}} \pmod{p}.$$

dans laquelle il faut prendre le signe supérieur ou inférieur, selon que le nombre a, que nous supposons n'être pas divisible par p, est ou n'est pas résidu quadratique de p.

Si nous posons $a=1$, le signe supérieur aura lieu, l'unité étant un carré, et par conséquent résidu quadratique de tout nombre. Nous avons donc

$$1.2.3\ldots(p-1) \equiv -1 \pmod{p}$$

congruence qui constitue le Th. de **Wilson**.

Remplaçons le premier membre de la formule (3) par le nombre -1, qui, comme nous venons de le voir, n'en diffère que d'un multiple de p, et changeons ensuite les signes des deux membres : il viendra ainsi

$$a^{\frac{p-1}{2}} \equiv \pm 1 \pmod{p}$$

congruence dans laquelle il faudra choisir le signe + ou le signe − selon que a est ou n'est pas résidu quadratique de p. Le théor. que cette formule renferme, et qui a été découvert par Euler, est d'une grande importance dans la théorie des résidus. — On fera disparaître le double signe dans la dernière congruence en élevant ses deux membres au carré. On trouve ainsi

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

ce qui est le théorème de Fermat.

Ce dernier Th. peut être démontré très simplement de la manière suivante, sans qu'il soit nécessaire de rien supposer de ce qui précède.

Les nombres a et p conservant leur signification, considérons les $p-1$ multiples de a que voici :

$$a \quad 2a \quad 3a \quad \ldots (p-1)\,a$$

Il est facile de voir que deux de ces nombres ne sau-

-vaient donner le même reste quand on les divise par p: car si les restes provenant des multiples ma et na étaient égaux, ma − na = (m−n)a serait divisible par p, ce qui est impossible, a n'étant pas divisible par p, et m−n étant < p sans pouvoir être zéro. Les restes que l'on obtient en divisant par p les p−1 multiples de a étant donc différents entre eux, et aucun de ces restes ne pouvant être nul, comme on le voit facilement, ces restes doivent coïncider avec les nombres de la série 1, 2, 3, .., (p−1), quand on fait abstraction de l'ordre dans lequel ils se suivent. Il suit de là que le produit des p−1 multiples de a doit donner le même reste que le produit 1.2.3...(p−1).

La différence de ces produits est donc un multiple de p. or cette différence pouvant se mettre facilement sous la forme

$$\left(a^{p-1}-1\right)\left(1.2.3....(p-1)\right)$$

et 1.2.3...(p−1) n'étant pas divisible par p, on en conclut que a^{p-1} étant divisé par p, donne l'unité pour reste.

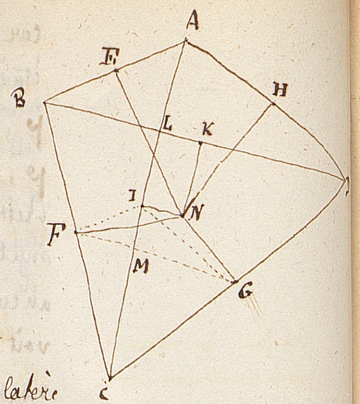
---

429. On partage le rayon d'une sphère en quatre parties égales; sur les deux divisions moyennes comme diamètre on décrit une sphère; cette sphère étant enlevée de la grande, trouver le centre de gravité de la partie restante. (Résolu, n°. 1471).

430. On a une suite de rectangles dont le sommet commun est en A, le sommet adjacent est sur une circonférence, la diagonale de ce second sommet passe toujours par le centre. Trouver le lieu décrit par le sommet P, opposé à A, et par le point M, intersection des diagonales.

150

431. Th. Si dans un quadrilatère qcq. ABCD on mène par les milieux I et K de chacune des diagonales une parallèle à l'autre, et qu'on joigne leur point de concours N aux milieux E, F, G, H, des côtés du quadrilatère, il sera partagé en quatre quadrilatères équivalents.



Je joins FG : cette droite est parallèle à BD et à IN. Le quadrilatère CFIG est évidemt. le quart du quadrilatère total, car il est la moitié du quadrilatère rentrant CBID, moitié du quadrilatère total : mais le quadrilatère NFCG est équivalent au quadrilatère CFIG, donc

$$NFCG = \frac{1}{4} ABCD$$

on démontrerait de même que chacun des quadrilatères NFBE, NEAH, NHDG est le 1/4 du proposé.

432. on demande S

$$S = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n \quad ?$$

on a

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a}{a-1}$$

$$a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a^2}{a-1}$$

$$a^3 + \dots + a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a^3}{a-1}$$

$$\dots$$

$$a^{n-1} + a^n = \frac{a^{n+1} - a^{n-1}}{a-1}$$

$$a^n = \frac{a^{n+1} - a^n}{a-1}$$

En ajoutant

$$S = \frac{na^{n+1} - (a + a^2 + \dots + a^n)}{a-1} = \frac{a^{n+1}\{n(a-1) - 1\} + a}{(a-1)^2}$$ (voir aussi 1474).

433. Th. $\dfrac{(x^{m}-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}$ est tjs. entier, m entier et positif qcq.

Le dénominateur est égal à

$$(x-1)^3 (x+1) . (x^2 - x + 1)$$

et les facteurs $x-1$, $x+1$, x^2-x+1 sont premiers entre eux. or le numérateur est évidemment divisible par $(x-1)^3$. Un des 3 nombres consécutifs m, $m-1$, $m-2$ est nécessairement pair : donc l'un des facteurs du numérateur est divisible par $x+1$. Un des trois mêmes nombres consécutifs est divisible par 3 : donc un des facteurs du numérateur est divisible par x^3-1.

Très facile géométriquement par la considération d'une sphère inscrite au cône et touchant le plan de l'ellipse en son foyer.

434. Si un cône de révolution passe par une ellipse, la somme des arêtes aboutissant aux extrémités d'un même diamètre de cette courbe est constante. (Examiner ce que devient cette proposition dans le cas d'une hyperbole ou d'une parabole (Comp. de l'Ec. Norm.)

435. Th. Soit une circonférence, A le centre, CAB un diamètre. Sur CB prolongé prenez un point D tel que l'on ait $DB.\overline{DC}^2 = AD.\overline{AB}^2$ (et non $AB.\overline{AD}^2$). Du point D comme centre, et d'un rayon AB, décrivez une circonférence coupant en E la circonférence donnée. L'arc BE est la septième partie de la circonférence (Viète).

On a par hypothèse la relation

$$DB.\overline{DC}^2 = AD.\overline{AB}^2$$

Soient

$$AD = 2l$$

$$AB = R = 1$$

La relation devient

$$(2l-1)(2l+1)^2 = 2l$$

ou

$$8l^3 + 4l^2 - 4l - 1 = 0$$

C'est l'Eq. qui donne les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{7}$. – Donc si l'on prend le milieu M de la ligne AD, on a

$$AM = \cos \frac{2\pi}{7}$$

Or, si l'on élève la perpendiculaire ME, il est clair que DE est égal au rayon du cercle : donc BE

est bien le septième de la circonférence.

436. Rayon de courbure des coniques.

Th. On prolonge le rayon de courbure d'une conique, à l'extérieur, d'une longueur égale à ce rayon : le cercle décrit sur le prolongement comme diamètre coupe orthogonalement le lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à la même conique. (Steiner).

Prenons une ellipse dont le centre est en C ; décrivons le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, lieu géométrique du sommet de l'angle droit circonscrit à l'ellipse.

Soit une tangente quelconque AT ; et AM le prolongement du rayon de courbure. Supposons décrit un cercle tangent en A à la droite AT, et coupant orthogonalement la première circonf. de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$. Soit G le point de rencontre des deux cercles : on sait que GC est tangent à la première circonférence, dont le centre est en O.

Il suffit de prouver que OA est égal au demi-rayon de courbure du point A, ou à $\frac{a'^2}{2b'\sin\theta}$; ($b' = CA \quad \theta = CAT$)

Or, soit prolongé CA jusqu'à ce qu'il rencontre de nouveau le cercle en B. On a

$$CB.CA = \overline{CG}^2 = a^2+b^2$$

donc

$$CB = \frac{a^2+b^2}{b'}$$

D étant le milieu de AB, on a

$$DA = \frac{1}{2}AB = \frac{BC-b'}{2} = \frac{a^2+b^2-b'^2}{2b'} = \frac{a'^2}{2b'}$$

or

$$OA = \frac{DA}{\cos OAD} = \frac{DA}{\sin\theta}$$

on a donc

$$OA = \frac{a'^2}{2b'\sin\theta}$$

c.q.f.d.

La même démonstration a lieu pour l'hyperbole et la parabole.

on déduit de là un moyen très simple de détermi-
-ner le rayon de courbure d'une conique en un point donné A sur cette conique.

Soient R et S les points où la normale en A rencontre le cercle de rayon $\sqrt{a^2+b^2}$, M étant l'extrémité du prolongement du rayon de courbure en A ; je dis que les quatre points R, A, S, M sont quatre points harmoniques.

En effet
$$RO \cdot SO = \overline{GO}^2$$
et
$$AO = GO$$
donc
$$RO \cdot SO = \overline{AO}^2$$

Le point M, étant le conjugué harmonique de A par rapport à R et S, se déterminera facilement ; par suite, on connaîtra AM.

437. Soient A, B, C les angles, p le $\frac{1}{2}$ périmètre, S la surface — ou l'excès sphérique — d'un triangle rectiligne — ou sphérique — : on aura

$$p^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}A \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}B \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}C = S \qquad \text{(facile.)}$$

Résolu p. 1517.

438. Les trois sommets A, B, C d'un triangle et les trois sommets A', B', C' d'un tétraèdre sont donnés : par un point qcq. M dans le plan du triangle ABC, on mène les droites MA, MB, MC. On prend dans l'espace un point S tel que que, dans le tétraèdre SA'B'C' on ait

$$SA' = MA \qquad SB' = MB \qquad SC' = MC$$

Le lieu des points S est une surf. du 2^d degré.

(Jacobi).

439. Théorème. — Si l'on place l'un sur l'autre deux polygones convexes d'un même nombre de côtés, de manière que deux côtés consécutifs de

l'un soient coupés par un côté de l'autre ; on obtient une suite de triangles saillants : le produit des côtés extérieurs de rang impair est égal à celui des côtés de rang pair.

Soit n le nombre des côtés de chaque polygone ; on forme $2n$ triangles extérieurs, ayant deux à deux un angle égal comme opposé par le sommet. Désignons par $t_1\ t_2\ t_3 \ldots t_{2n}$ les aires des triangles, par $a_1\ a_2\ a_3 \ldots a_{2n}$ les côtés extérieurs, et par $b_1\ b_2\ b_3 \ldots b_{2n}$ les côtés intérieurs successifs, on a

$$t_1 : t_2 :: a_1 b_1 : a_2 b_2$$

$$t_2 : t_3 :: a_3 b_2 : a_4 b_3$$

$$t_3 : t_4 :: a_5 b_3 : a_6 b_4$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{i-2} : t_{i-1} :: a_i b_{i-2} : a_{i+1} b_{i-1}$$

$$t_{i-1} : t_i :: a_{i+1} b_{i-1} : a_{i+2} b_i$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$t_{2n} : t_1 :: a_{4n-1} b_{2n} : a_{4n} b_1$$

Multipliant par ordre et supprimant les facteurs communs, on obtient

$$a_1 a_2 a_3 \ldots a_{4n-1} = a_2 a_4 a_6 \ldots a_{4n}$$

440. Théorème. Si un point P se meut dans un plan de manière que la somme des carrés des tangentes PA_1, PA_2 .. menées de ce point à une courbe algébrique de degré n, située dans ce plan, soit constante, la normale en P au lieu géométrique de P passe par le centre de moyenne distance des centres de courbure de la courbe, correspondants aux points de contact A_1, A_2 ...

Solution Géométrique. –

Lemme. Etant donné un nombre qcq. de cercles dans un même plan, le lieu géométrique des points tels que la somme des carrés des tangentes à ces cercles issues de chacun de ces points, est constante, – est le même que le lieu des points dont la somme des carrés des distances aux centres de ces cercles est constante: donc ce lieu est une circonférence ayant pour centre le point de moyenne distance des centres des cercles.

actuellement, d'un point P supposons qu'on ait mené les n(n–1) tangentes à une ligne de degré n, et qu'on ait décrit les n(n–1) cercles de courbure aux points de contact. Par hypothèse, la somme des carrés des tangentes aux cercles est constante: donc, d'après le lemme, le point P est sur une circonférence C ayant pour centre le point de moyenne distance des centres de courbure. Mais chaque cercle de courbure a deux tangentes infiniment voisines avec en commun avec la courbe donnée: donc le cercle C touche en P le lieu du point P, c q f d.

441. Nouvelle Méthode pour le calcul des Fonctions Symétriques (abel Transon)

On connaît le théorème suivant :

Th. Pour avoir la somme des valeurs que prend une fonction entière $\varphi(x)$, dans laquelle on remplace x successivement par toutes les racines de l'équation

$$F(x) = 0$$

il faut effectuer la division indiquée par l'expression $\frac{F'(x)\,\varphi(x)}{F(x)}$: la somme en question sera le coefficient du terme de ce quotient dans lequel l'exposant de x est -1 : ou bien, ce qui est la même chose, ce sera le coefficient du premier terme du reste si l'on arrête l'opération après avoir déterminé au quotient le terme indépendant de x.

En effet, comme on a l'identité

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \cdots$$

il s'ensuit

$$\frac{F'(x)\,\varphi(x)}{F(x)} = \frac{\varphi(x)}{x-a} + \frac{\varphi(x)}{x-b} + \cdots = \pi(x) + \frac{\varphi(a)}{x-a} + \frac{\varphi(b)}{x-b} + \cdots$$

où $\pi(x)$ est une fonction entière : et dès lors on a évidemment

$$\frac{F'(x)\,\varphi(x)}{F(x)} = \pi(x) + \frac{x^{m-1}\,\Sigma\varphi(a) + \cdots}{F(x)}$$

ce qui démontre le théorème.

Au lieu d'employer la division, on peut, à l'aide de l'éq. $F(x)=0$, abaisser le degré du produit $F'(x)\,\varphi(x)$ jusqu'à être de degré inférieur d'une unité à celui de cette même équation. Pour cela, il suffit de remarquer que, si $F(x)=0$ est du degré m par ex. on peut en déduire x^m et

toutes les puissances supérieures à la $m^{ième}$ en fonction de x^{m-1} et des puissances inférieures. Et alors, le coefficient de x^{m-1}, dans le produit $F'(x).\varphi(x)$ ainsi préparé, sera précisément égal à la somme demandée. J'appellerai le second procédé abaissement ou Réduction.

Voilà donc un moyen très-direct pour calculer la fonction symétrique

$$\varphi(a) + \varphi(b) + \cdots + \varphi(l)$$

$a, b, \ldots l$ étant les racines d'une Eq. donnée.

En présentant le théorème ci-dessus avec toute l'extension dont il est susceptible, on peut en déduire une méthode très-générale et très-expéditive pour le calcul de toute fonction symétrique.

Afin de justifier cette assertion, on va donner ici la marche à suivre pour le calcul d'une fonction dont la forme générale renferme explicitement deux ou trois lettres : et il sera facile d'étendre la méthode au cas d'un plus grand nombre de lettres. De plus, je supposerai d'abord très-expressément qu'il s'agit de fonctions entières.

Supposons donc qu'il s'agisse de calculer la fonction symétrique dont le terme général est $\varphi(a,b)$; c.a.d. qu'on veut trouver la somme des valeurs que prend la fonction $\varphi(y,z)$ lorsqu'on y remplace successivt. y et z par les racines d'une Eq. donnée $F(x)=0$. les racines combinées deux à deux de toutes les manières possibles, la fonction dont il s'agit aura pour symbole

$$\Sigma\varphi(y\,z)$$

Il se doit entendre que la fonction algébrique entière $\varphi(y\,z)$ se compose de termes dans chacun desquels entrent y et z comme facteurs avec des exposants d'ailleurs qcqs. mais sans que l'un des deux exposants puisse être nul : car s'il y avait de tels termes, c'est que la fonction proposée

renfermerait une fonction symétrique de la nature de celles qu'on a examinées précédemt, dont le symbole est

$$\Sigma\, \varphi(y)$$

et l'on en ferait le calcul à part au moyen du théorème rapporté ci-dessus.

Donc pour construire

$$\Sigma\, \varphi(y,z)$$

je fais premièremt. le quotient de $F(x)$ par $x-a$, où a est censé être une des racines de la proposée. Soit ce quotient égal à $F_1(x)$; ses coefficients seront des fonctions entières de la lettre a, et l'éq.

$$F_1(x) = 0$$

aura pour racines toutes celles de la proposée, moins la racine a.

C'est pourquoi le coefficient de x^{-1}, dans le quotient

$$\frac{F_1'(x)\cdot\varphi(a,x)}{F_1(x)}$$

sera la somme suivante

$$\varphi(a,b) + \varphi(a,c) + \cdots + \varphi(a,l)$$

Maintenant, si l'on représente ce coefficient par $\psi_1(a)$, il n'y aura plus qu'à effectuer la somme des valeurs

$$\psi_1(a) + \psi_1(b) + \cdots + \psi_1(l)$$

ce qu'on obtiendra par la ~~Réduction~~ division de l'expression

$$\frac{F'(x)\cdot\psi_1(x)}{F(x)}$$

ou par la réduction du produit $F'(x)\cdot\psi_1(x)$.

Si l'on veut calculer la fonction à trois lettres

$$\Sigma\, \varphi(y,z,u)$$

où l'on doit remplacer y, z et u successt. par toutes les racines de $F(x)=0$ combinées 3 à 3 de toutes les manières possibles, on construira le polynôme

$$\frac{F(x)}{(x-a)(x-b)} = F_2(x)$$

fonction entière, parce que a et b sont des racines de la proposée : fonction où les coefficients de x sont eux-mêmes des fonctions entières de a et de b.

La Réduction, au moyen de l'Eq. $F_2(x)=0$, du produit

$$F'_2(x)\cdot\varphi(a,b,x)$$

donnera la Somme des valeurs obtenues en substituant à x, dans $\varphi(a,b,x)$, toutes les Racines de la proposée, moins les racines a et b. Le Résultat sera une fonction entière de a et b, que je Représente par $\psi(a,b)$: il Restera à calculer la Somme des valeurs que prend la fonction $\psi(y,z)$ lorsqu'on y Substitue Successivement à la place de y et z toutes les Racines de $F(x)=0$ combinées deux à deux: ce qui Ramène au cas précédent.

En Résumé, si la forme de la fonction Symétrique ne comporte qu'une Seule lettre, il y a une Seule division à faire; si elle comporte deux lettres, deux divisions, et ainsi de suite.

En outre, pour le cas de deux lettres, on doit former une fonction auxiliaire $\frac{F(x)}{x-a}=F_1(x)$; pour celui de trois lettres, deux fonctions auxiliaires, savoir, la précédente $F_1(x)$, et une seconde $\frac{F_1(x)}{x-b}=F_2(x)$, etc.

Ces fonctions sont celles qu'emploie aussi la méthode de Mr. Cauchy, avec la différence que Mr. Cauchy les construit toutes, quelle que soit la fonction à calculer. — on pourrait faire voir que chacune de ces fonctions auxiliaires peut s'écrire couramment, c.a.d. sans division, et sans passer par les précédentes; à-peu-près comme on écrirait une fonction dérivée: ce qui n'est pas indifférent dans la pratique. — Enfin on verra plus loin que le nombre déjà si restreint des divisions à effectuer peut encore être diminué dans des cas très-étendus.

J'ai Supposé expressément des fonctions Symétriques entières: mais la méthode sera complétée, à cet Egard, par le Résultat Important que Mr. Serret a donné dans son cours d'algèbre Supérieure: savoir, que toute fonction Rationnelle fractionnaire d'une ou plusieurs des racines d'une Eq. donnée se Ramène, par de simples divisions algébriques, à une fonction Entière. Et comme

ce Résultat, combiné avec la méthode ci-dessus, procure une démonstration nouvelle d'un très beau théorème, il est bon de s'y arrêter un instant.

Démonstration d'un Théorème d'algèbre. — Soit à calculer la fonction

$$\sum \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

où le symbole sommatoire s'étend à toutes les racines d'une Eq. donnée $F(x)=0$. On voit d'abord que $\psi(x)$ et $F(x)$ doivent être premiers entre eux: sans quoi la somme demandée aurait un ou plusieurs termes infinis.

D'après cela, 1° Si l'on applique aux deux fonctions $F(x)$ et $\psi(x)$ la méthode du plus grand commun diviseur, on est assuré d'arriver à un reste indépendant de x que je représenterai par R_n. D'autre part, comme on doit remplacer x exclusivement par des racines de $F(x)=0$, on verra bien que tous les restes de l'opération du $g. c. d.$ et en particulier le dernier reste R_n, se trouvent exprimés par le produit de deux fonctions entières dont l'une est $\psi(x)$: de sorte qu'on a

$$R_n = \psi(x).\theta(x)$$

$\theta(x)$ étant une fonction entière de x: et ainsi la question proposée revient au calcul de la fonction symétrique entière

$$\frac{1}{R_n}\sum \varphi(x).\theta(x)$$

De là on peut déduire le théorème suivant, que, si $\psi(x)$ désigne un polynôme qcq. du degré $m-1$, la somme

$$\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)}$$

étendue aux racines de l'Eq. (de degré m et sans racines égales)

$$F(x)=0$$

a pour valeur le coefficient de x^{m-1} dans $\psi(x)$.

En effet le calcul de $\sum \frac{\psi(x)}{F'(x)}$ revient, d'après ce qui précède, à celui de la fonction entière $\sum \frac{\psi(x).\theta(x)}{R_n}$, où R_n est un nombre avec la relation

$$R_n = \theta(x).F'(x)$$

D'un autre côté, il résulte de la nouvelle méthode pour les fonctions symétriques que la fonction entière $\sum \frac{\psi(x).\theta(x)}{R_n}$

sera exprimée par le coefficient de x^{-1} dans le quotient

$$\frac{\psi_1(x).\theta(x)}{R_n} \cdot \frac{F'(x)}{F(x)}$$

ou, à cause de la valeur de R_n, dans le quotient

$$\frac{\psi_1(x)}{F(x)}$$

et, puisqu'on a supposé $\psi_1(x)$ du degré $m-1$, la somme en question sera bien, comme on l'a annoncé, le coefficient du premier terme de $\psi(x)$.

Et d'après cela, si $\psi_1(x)$ est de degré inférieur à $m-1$, la fonction symétrique

$$\Sigma \frac{\psi(x)}{F'(x)}$$

étendue à toutes les racines de l'Eq. de degré m $F(x)=0$, sera nulle.

Ces théorèmes résultent, si l'on veut, de la décomposition des fractions rationnelles. Mais on sait que, réciproquement, Mr. Liouville, après les avoir établis à priori, en a déduit, avec une rare facilité, cette même décomposition. C'est pourquoi une démonstration purement algébrique avait qq. intérêt.

Démonstration d'une propriété fondamentale des fonctions symétriques. — On a pu remarquer que la nouvelle méthode possède, comme celle de Mr. Cauchy, l'avantage de démontrer directement que toute fonction symétrique entière est elle-même une fonction entière des coefficients, sans aucun diviseur numérique ; puisqu'on l'obtient par de simples divisions algébriques, où le coefficient du premier terme dans les diviseurs est toujours égal à l'unité.

Mais il est une autre propriété des fonctions symétriques entières, propriété dont on fait usage dans la théorie de l'élimination, et qu'il faut déduire aussi de la méthode elle-même. Voici en quoi consiste cette propriété.

Ecrivons l'Eq. proposée sous la forme

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \dots + p_m = 0$$

et si l'on donne une fonction rationnelle entière des lettres $p_1, p_2, \ldots p_m$ on pourra faire, dans chacun de ses termes, la somme des indices des lettres p, en ayant soin de compter l'indice d'une même lettre autant de fois que cette lettre sera facteur. Cette somme faite sera l'Indice du terme que l'on considère. C'est ainsi que les monômes

$$p_1^2 p_2 \; ; \quad p_1 p_2 p_3 \; ; \quad p_2^3 p_m$$

ont respectivem^t. pour indices les nombres suivants

$$4 \qquad\qquad 6 \qquad\qquad 6+m$$

Cette opération ainsi faite sur chaque terme, la somme la plus grande que l'on aura obtenue marquera ~~les~~ l'Indice de la fonction.

Or si l'on donne la forme générale d'une fonction symétrique entière à une, ou deux, ou trois, etc. lettres, le degré de cette fonction est marqué, comme à l'ordinaire, par le plus haut exposant s'il y a une seule lettre, ou la plus haute somme d'exposants s'il y a plusieurs lettres.

D'autre part, quand la fonction a été calculée, elle est exprimée en fonction rationnelle et entière des lettres $p_1 \ldots p_m$. Elle a donc un certain indice.

Le théorème qu'il s'agit de démontrer est le suivant

L'Indice d'une fonction symétrique est égal à son degré.

Considérons premièrement une fonction symétrique à une seule lettre, c.a.d. dont le symbole général est

$$\Sigma\, \varphi(x)$$

Comme la ~~somm~~ forme générale $\varphi(x)$ ne peut être que la somme de plusieurs puissances de x affectées respectivem^t. de divers coefficients, il suffit de faire la démonstration dont il s'agit pour la fonction

$$\Sigma A x^n$$

où A est un nombre.

Pour obtenir cette fonction, il faut effectuer la division indiquée par

$$\frac{A m x^{m-1+n} + A(m-1) p_1 x^{m-2+n} + A(m-2) p_2 x^{m-3+n} + \cdots}{x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \cdots}$$

or, si l'on représente le quotient par

$$q_0 x^{n-1} + q_1 x^{n-2} + q_2 x^{n-3} + \cdots + q_{r-1} x^{n-r} + q_r x^{n-r-1} + \cdots$$

on aura, d'après les règles de la division algébrique,

$$q_r = -p_1 q_{r-1} - p_2 q_{r-2} - \cdots - p_r q_0 + (m-r) A p_r$$

or, q_0 étant égal à mA, a pour indice zéro : donc les coefficients suivants, considérés comme fonctions des lettres p,

$$q_1 = -p_1 q_0 + A(m-1) p_1$$

$$q_2 = -p_1 q_1 - p_2 q_0 + A(m-2) p_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$q_r = -p_1 q_{r-1} - \cdots$$

ont respectivem^t. pour indices les nombres $1, 2, \ldots r$. Donc enfin le coefficient de x^{-1}, qui sera représenté par q_n, et qui est la valeur de la fonction proposée de degré n, a pour indice le même nombre n.

Il est manifeste que, si le coefficient A était lui-même une fonction rationnelle et entière des lettres p, son indice marquerait celui de q_0, et, par conséquent, s'ajouterait à r pour former celui de q_r. ainsi l'indice de la fonction symétrique

$$A \sum x^n$$

sera égal à $n+n'$ si n' est l'indice de A.

à l'égard des fonctions à deux lettres, il suffit égalem^t. de faire la démonstration pour une fonction monôme telle que

$$\sum a^n b^{n'}$$

or, d'après les règles exposées, il faut effectuer d'abord la

Réduction du produit

$$a^n x^{n'} F'_1(x)$$

au moyen de l'Éq. auxiliaire, $F_1(x)=0$, et, vu la forme de $F_1(x)$, savoir

$$x^{m-1} \begin{array}{l} + a \\ + p_1 \end{array} \Bigg| \; x^{m-2} \begin{array}{l} + a^2 \\ + p_1 a \\ + p_2 \end{array} \Bigg| \; x^{m-2} + \cdots$$

il sera aisé de voir que cette Réduction donnera une fonction $\psi(a)$ telle, qu'en chacun de ses termes, le degré de a uni à l'indice de la lettre p, fera une somme égale à $n+n'$; de sorte que la Réduction qu'il faudra faire ensuite, c. à d. la Réduction de

$$\psi(x).F'(x)$$

au moyen de $F(x)=0$, donnera nécessairement une fonction de l'indice $n+n'$.

Cette démonstration s'étendra de la même manière au cas d'un plus grand nombre de lettres.

Si l'on opère sur l'Éq. générale de degré m à deux inconnues x et y, les indices des coefficients de x marquent le degré de chacun d'eux en y. Par suite, le théorème qu'on vient de démontrer fait connaître le degré en y de toute fonction symétrique des valeurs

$$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_m$$

qui satisfont à l'Éq. proposée; et c'est pourquoi ce théorème joue un grand rôle dans la théorie de l'Élimination: mais nous pouvons aussi en tirer un moyen d'abréger dans certains cas, le calcul des fonctions symétriques.

Abréviations et Exemples.

Première abréviation. Soit n le degré de la fonction symétrique. Si n est $< m$, on peut supprimer dans $F(x)$, dans $F_1(x)$, $F_2(x)$, etc. comme aussi dans $F'(x)$, $F'_1(x)$, $F'_2(x)$, etc. tous les coefficients dont l'indice est supérieur à n. Cela résulte manifestement du théorème ci-dessus démontré.

Deuxième abréviation. — à la proposition que nous avons prise pour point de départ, on peut ajouter les suivantes, dont on trouvera aisément la démonstration :

1°. La somme des valeurs que prend la fonction entière $a.\varphi(b)$ dans laquelle on remplace successivement a et b par toutes les racines de $F(x)=0$ combinées deux à deux de toutes les manières possibles, est égale au second terme du reste dans la division de $F'(x).\ \varphi(x)$ par $F(x)$, ce second terme pris en signe contraire.

2°. Le coefficient du troisième terme dans le même reste, ce coeff. pris d'ailleurs avec son signe, sera la valeur de $\sum ab\,\varphi(c)$; celui du quatrième terme, pris en signe contraire, donnera la valeur de $\sum abc\,\varphi(d)$, etc., et ainsi de suite.

D'après cela, si les formes générales $\varphi(a,b)$, $\varphi(a,b,c)$, etc. se réduisent à $a.\psi(b)$; $a.b.\psi(c)$, etc. il n'y aura pas deux ou trois divisions à faire, mais une seule. Et de même, si la forme $\varphi(a,b,c)$ revient à la suivante $a\psi(b,c)$, il n'y aura pas lieu d'employer la seconde fonction auxiliaire, mais seulement la première : il n'y aura pas trois divisions à faire, mais deux seulement, et ainsi de suite.

En un mot, toute lettre qui entre dans $\varphi(a,b,\ldots)$ comme facteur de tous les termes et avec l'exposant 1 ne nécessite pas une division de plus, ainsi que la méthode générale semblait l'indiquer d'abord. Elle exige seulement que l'on considère un terme de plus dans le reste de la division qu'on effectue.

Troisième abréviation. — Comme on ne veut obtenir de chaque division ou réduction qu'un terme unique, et dont le degré est connu d'avance, on s'abstiendra d'écrire tous les résultats partiels de calcul qui seraient relatifs aux termes de degré moindre, et cette attention

simplifiera beaucoup le travail du calculateur.

Exemple. On demande la détermination de $\sum a^2 b$, avec l'Eq. générale

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + p_3 x^{m-3} + \dots\dots = 0$$

Il n'y aura ici qu'une seule division à faire; on n'aura à tenir compte que des quatre premiers termes de l'Eq. donnée. On n'écrira rien de ce qui devrait affecter les termes du reste au-delà du second, c.a.d. au-delà du terme qui est affecté de la première puissance de x dans le dividende, après qu'on a supprimé préalablement les puissances de x communes à tous les termes du dividende et du diviseur;

$$\left.\begin{array}{l|l|l} mx^4 + (m-1)p_1 x^3 + (m-2)p_2 & x^2 \;+(m-3)p_3 & x \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + p_1^2 & \qquad\quad + p_1 p_2 & \end{array}\right\} \frac{x^3 + p_1 x^2 + p_2 x + p_3}{mx - p_1}$$

ainsi le second terme du reste étant $-3p_3 + p_1 p_2$, on a donc

$$\sum a^2 b = 3p_3 - p_1 p_2$$

On vérifiera aisément ce résultat par la transformation très facile de la fonction proposée en sommes de puissances semblables. — Et ensuite on pourra mieux apprécier l'avantage de la nouvelle méthode en s'exerçant sur quelque fonction moins simple, comme seraient

$$\sum a^2 bc \quad , \quad \sum (a^3 + \alpha a^2)(b^2 + \beta b)\, cd$$

où α et β sont des nombres donnés, et dont la première aurait exigé dans la division précédente seulement la conservation d'un terme de plus au dividende et au diviseur, tandis que la seconde s'obtiendra à l'aide de deux divisions.

442. Méthode Sylvester pour l'élimination. –

Soient f_1 et f_2 deux fonctions rationnelles entières en y; savoir

$$(1)\quad \begin{cases} f_1 = a'_m y^m + a'_{m-1} y^{m-1} + \cdots + a'_0 = 0 \\ f_2 = a''_n y^n + a''_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a''_0 = 0 \end{cases}$$

Multiplions l'Eq. $f_1 = 0$ successivement par $y^{n-1}, y^{n-2}, \ldots y^0$ et de même l'Eq. $f_2 = 0$ success^t. par $y^{m-1}, y^{m-2}, \ldots y^0$; nous obtenons $m+n$ Equations linéaires relativement aux quantités $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \ldots y^0$. Eliminant entre ces $m+n$ Eq. du premier degré, comme autant d'inconnues, les $m+n-1$ puissances, $y^{m+n-1}, y^{m+n-2}, \ldots y^1$ on obtient une Eq. entre les coefficients a', a''. Or, dans toutes ces Eq. la quantité entièrement connue est nulle; donc on ne peut en déduire que le rapport entre les inconnues, et le déterminant est nul. Le déterminant étant représenté par X, on aura $X = 0$ pour l'Eq. finale, et sans facteurs étrangers, car les coefficients a' n'y dépassent pas le degré n et les coefficients a'' le degré m: car Euler a démontré que toute fonction entière évanouissante de a' et de a'' qui jouit de cette propriété représente la véritable Eq. finale (voir ann. de Terquem, Tome VII, p. 163.)

443. Théorème de Mac-Cullagh sur le Triangle inscrit dans l'Ellipse.

1. Lemme. Soient une Ellipse ayant pour grand axe AB, et une $\frac{1}{2}$ Circonférence décrite sur AB comme diam. dans le même plan: soient M, N deux points sur l'ellipse; M', N' deux points projectivem^t. correspondants sur la demi-circonf. Par le centre O menons le $\frac{1}{2}$ diam. OP parallèle à la corde MN, nous aurons la proportion

$$\text{Corde } MN : \text{Corde } M'N' :: OP : OA$$

Démonstration: Par le point M menons une parallèle à la corde $M'N'$, et soit Q le point où cette parallèle rencontre

la droite NN': P' étant le point projectivem^t. correspond^t. de P, joignons O et P'; OP', project. de OP, est donc parallèle à M'N' ou à MQ: les deux triangles QMN et P'OP sont donc semblables, comme ayant les côtés parallèles. Donc

MN : MQ :: OP : OP' ; or MQ = M'N', OP' = OA, donc ... cqfd.

2. Lemme. L'aire d'un triangle inscrit dans une ellipse est égale au produit des trois côtés multiplié par le produit des deux demi-axes, et divisé par 4 fois le produit des 3 demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle.

Démonstration. Soient LMN un triangle inscrit dans une ellipse, et L'M'N' le triangle projectivement correspondant dans la circonférence décrite sur le grand axe de l'ellipse; faisons LM = n, MN = l, NL = m, M'L' = n', M'N' = l', N'L' = m': et soient a et b les 2 $\frac{1}{2}$ axes; λ, μ, ν les $\frac{1}{2}$ diam. respectivem^t. parallèles aux côtés MN, LN, LM. On a, en vertu du lemme précédent,

$$l' = \frac{al}{\lambda} \qquad m' = \frac{am}{\mu} \qquad n' = \frac{an}{\nu}$$

d'où

$$l'm'n' = \frac{a^3 lmn}{\lambda\mu\nu} = 4aS' = \frac{4a^2}{b}S$$

et de là

$$S = \frac{ab.\ lmn}{4\lambda\mu\nu} \qquad \text{cqfd.}$$

3. Théorème. – Un triangle étant inscrit dans une ellipse, le rayon du cercle circonscrit au triangle est égal au produit des trois demi-diamètres parallèles aux côtés du triangle, et divisé par le produit des deux demi-axes.

C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

Corollaire. Lorsque les trois sommets du triangle se réunissent, on obtient pour la valeur du rayon de courbure le cube du $\frac{1}{2}$ diam. parallèle à la tangente, divisé par le produit des deux demi-axes; expression connue.

---

244. Problème. — Deux courbes du second degré étant tangentes l'une à l'autre en deux points, démontrer analytiquement que si, d'un point qcq. de la droite qui joint les deux points, on mène les 4 tangentes à ces courbes, les points de contact sont en ligne droite. (conc. d'Ecol. Norm. 1843).

Soient

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

$$y^2 + B'xy + C'x^2 + D'y + E'x + F' = 0$$

les Eq. des deux courbes. — Je prends la droite AB pour axe des y et la Tg. en B pour axe des x. — Je fais $x=0$, et j'indique que les deux Eq. résultantes ont chacune une racine nulle, et que les deux autres racines sont égales: ce qui donne

$$F = 0 \qquad F' = 0 \qquad D = D'$$

Les Eq. deviennent alors

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex = 0$$

$$y^2 + B'xy + C'x^2 + Dy + E'x = 0$$

Je fais ensuite $y=0$ et j'indique que les deux Eq. ont chacune deux racines nulles; ce qui me donne

$$E = 0 \qquad E' = 0$$

J'obtiens donc en définitive les deux Eq.

$$y^2 + Bxy + Cx^2 + Dy = 0 \qquad (1)$$

$$y^2 + B'xy + C'x^2 + Dy = 0 \qquad (2)$$

Or, si j'appelle β l'ordonnée d'un point qcq. C de la droite AB, les cordes de contact des tangentes passant par ce point seront

$$(2\beta + D)y + B\beta x + D\beta = 0$$

$$(2\beta + D)y + B'\beta x + D\beta = 0$$

Pour prouver que ces deux Equations sont identiques, il suffit de démontrer que $B' = B$. Pour cela, j'élimine y^2 entre les Eq. (1), (2) et je divise le résultat par x. J'obtiens

$$(B - B')y + (C - C')x = 0$$

qui représente la droite AB. Identifiant avec l'Eq.

$x=0$, j'obtiens $B=B'$, donc les deux cordes de contact sont identiques, et par conséquent les deux 2 points sont en ligne droite c.q.f.d.

225. Sur une Méthode proposée par Ampère pour extraire les Racines des Fractions. – Décomposition des fractions en facteurs.

Soit $\frac{a}{b}$ une fraction numérique dont on veut extraire la racine n^e, a pouvant indifférem^t. être $\gtrless b$. Multiplions ses deux termes par n; et, après avoir formé la progression

$$na \,.\, na+(b-a) \,.\, na+2(b-a) \,.\, na+3(b-a) \,.\, \ldots \, nb-(b-a) \,.\, nb$$

considérons les n fractions que l'on obtient en divisant chacun des termes de cette progression par le suivant, cad.

$$\frac{na}{na+(b-a)}\,,\ \frac{na+(b-a)}{na+2(b-a)}\,,\ \frac{na+2(b-a)}{na+3(b-a)}\,,\ \ldots\ \frac{nb-(b-a)}{nb}$$

le produit de toutes ces fractions sera égal à la proposée.

Maintenant, la différence des fractions consécutives étant ordinairement peu considérable, on peut la négliger, au moins pour une première approximation: et alors le produit des n fractions sera la n^e puissance de la fraction moyenne, en entendant par là celle du milieu quand n est impair, cad. la fraction

$$\frac{na+\frac{1}{2}(n-1)(b-a)}{na+\frac{1}{2}(n+1)(b-a)}$$

ou plus généralem^t. et dans tous les cas, la fraction que l'on obtient en ajoutant terme à terme les deux fractions extrêmes. On aura donc ainsi l'égalité approximative

$$\frac{a}{b}=\left\{\frac{(n+1)a+(n-1)b}{(n-1)a+(n+1)b}\right\}^n$$

ce qui donne une valeur approchée de $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.

au reste, si l'on veut se faire une idée précise du degré

l'approximation ainsi obtenue, il n'y a qu'à développer l'expression précédente après l'avoir préalablement mise sous la forme

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{a-b}{a+b}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{b-a}{b+a}\right)^n}$$

puis comparer le développement à la fraction proposée.

Exemple.
$$\sqrt[3]{\frac{128}{125}} = \frac{127}{126} = 1,0079365$$

au lieu de $1,0079361$

Erreur $0,0000004$

Il est clair que l'on pourrait, en renversant la question, obtenir d'après le même principe, et par une opération fort simple, la puissance $(2n+1)^e$ d'une fraction $\frac{a}{b}$: car on a approximativement

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{(n+1)a-nb}{na-(n-1)b}\cdots\frac{3a-2b}{2a-b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{2b-a}\cdot\frac{2b-a}{3b-2a}\cdots\frac{nb-(n-1)a}{(n+1)b-na}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{(n+1)a-nb}{(n+1)b-na}$$

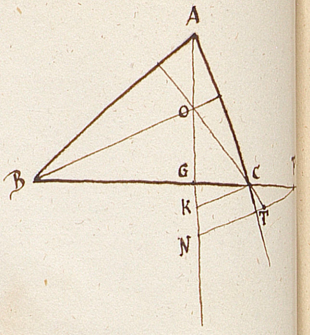
on trouverait facilement la modification convenable au cas d'une puissance de degré pair.

On comprend du reste que la méthode sera d'autant plus avantageuse que le nombre n sera plus grand et que la différence des nombres a et b sera plus petite en comparaison de leurs valeurs absolues.

---

446. Théorème. – Quatre droites dans un même plan forment quatre triangles ; dans chaque triangle existe un point de rencontre des trois hauteurs ; les quatre points de rencontre sont sur une même droite.

Voir 1540 une démonstration simple par la Géométrie analytique.



Lemme I. Le point F est un point qcq. du prolongem^t. de BC ; je mène les 3 hauteurs du triangle, je marque le pied G de celle qui correspond à la base BC ; si l'on prolonge la hauteur Co jusqu'à la rencontre avec la perp. abaissée du point F sur AC, on a la relation

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF.CG}{CF.BG}$$

Démonstration. – Je mène par le point C une parallèle à NT, ce qui me donne

$$\frac{NT}{CK} = \frac{OT}{OC}$$

Mais les triangles semblables BOC et CFT donnent

$$\frac{Bo}{FT} = \frac{Co}{CT}$$

Multipliant ces deux égalités terme à terme, nous avons

$$\frac{NT.Bo}{BFT.CK} = \frac{OT}{CT} \quad \text{d'où} \quad \frac{NT}{FT} = \frac{OT}{CT}.\frac{CK}{Bo}$$

or nous avons aussi

$$\frac{CK}{Bo} = \frac{CG}{BG} \quad \text{et} \quad \frac{OC}{CT} = \frac{BC}{CF}$$

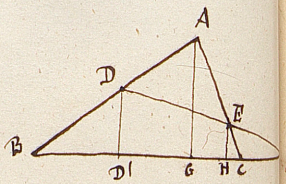
d'où, componendo,

$$\frac{OT}{CT} = \frac{BF}{CF}$$

donc enfin

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF.CG}{CF.BG} \qquad \text{C.q.f.d.}$$

Lemme II. Si, de deux points D et E des côtés d'un triangle, on abaisse des perp. sur le 3e. côté, on a



$$\frac{GH}{CD'} = \frac{AE.BD.CG.FE}{FD.BG.CE.AD}$$

Nous avons d'abord successivem^t., à cause des perpendiculaires

$$\frac{GH}{CH} = \frac{AE}{CE}, \quad \frac{BD'}{D'G} = \frac{BD}{AD}$$

D'où, faisant le produit,

$$\frac{GH}{D'G} \cdot \frac{BD'}{CH} = \frac{AE.BD}{CE.AD} \quad \text{ou} \quad \frac{GH}{GD'} = \frac{AE.BD}{CE.AD} \cdot \frac{CH}{BD'}$$

Nous avons aussi, à cause des perpendiculaires,

$$\frac{CH}{CG} = \frac{EH}{AG}, \quad \frac{BG}{BD'} = \frac{AG}{DD'}$$

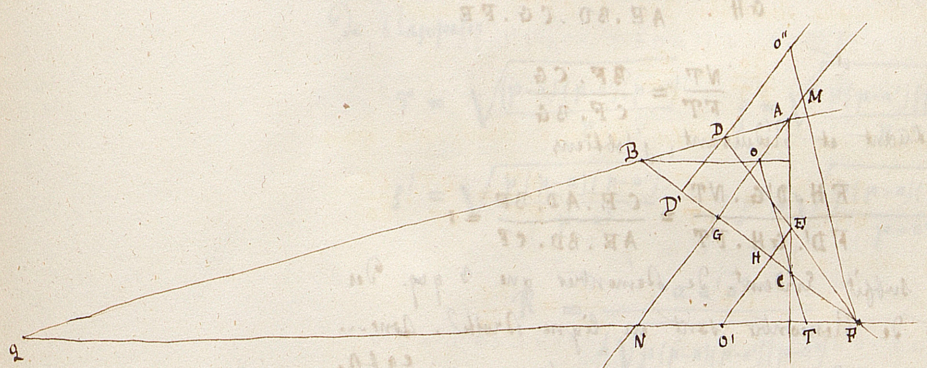
et, en multipliant,

$$\frac{CH}{BD'} = \frac{EH}{DD'} \cdot \frac{CG}{BG} \quad \text{or} \quad \frac{EH}{DD'} = \frac{FE}{FD}$$

et, par suite,

$$\frac{GH}{GD'} = \frac{AE.BD.CG.FE}{CE.AD.BG.FD} \quad \text{cqfd.}$$

Je viens à la démonstration du théorème.



Soit BCDE le quadrilatère donné. Je prends par ex. les triangles ABC, BDF, ECF. Dans le 1er le point de rencontre est O : dans le second, il est O'', et dans le 3e O'.

Je prolonge AG jusqu'à la rencontre N avec la hauteur FO'' du triangle BDF. alors j'obtiens un triangle dont les côtés sont coupés aux points O, O', O'' ; ce triangle est MNF. Donc, si je prouve qu'on a l'égalité suivante

$$MO''.NO.FO' = FO''.MO.NO'$$

les trois points O, O', O'' seront en ligne droite. Or, dans le triangle FGN, $O'H$ étant parallèle à GN, nous aurons

$$FO' : NO' :: FH : HG$$

et, par la même raison, on a aussi

$$MO'' : FO'' :: D'G : FD'$$

Enfin, prolongeant CO jusqu'en T, nous avons

$$NO : MO :: NT : FT$$

et, multipliant ces trois proportions terme à terme, on voit qu'il suffit de prouver que

$$\frac{FH.D'G.NT}{FD'.GH.FT} = 1$$

or $\frac{FH}{FD'} = \frac{FE}{FD}$, et, d'après les deux Lemmes précédents, j'ai

$$\frac{D'G}{GH} = \frac{CE.AD.BG.FD}{AE.BD.CG.FE}$$

et

$$\frac{NT}{FT} = \frac{BF.CG}{CF.BG}$$

Substituant et réduisant, j'obtiens

$$\frac{FH.D'G.NT}{FD'.GH.FT} = \frac{CE.AD.BF}{AE.BD.CF} = 1$$

or il suffit évidem^t. de démontrer que 3 qcq. des 4 points de rencontre sont en ligne droite. Donc...

c.q.f.d.

Rem. Le lemme I peut se démontrer plus simplement. — Supposons que FTN soit une droite qcq. coupant OB en Q ; on a la relation connue

$$\frac{GC.BF}{BG.CF} = \frac{TN.FQ}{TF.NQ}$$

or, FTN étant parallèle à OB, on a

$$\frac{FQ}{NQ} = 1$$

Donc, etc..

447. Quelques propriétés du Triangle Rectiligne.

I. Soient a, a', a'' les trois côtés d'un triangle Rectiligne qcq; α, α', α'' les hauteurs ;
e, ε ; e', ε' ; e'', ε'' les segments des hauteurs compris entre leur point de rencontre et les sommets du triangle, et entre ce même point de rencontre et leurs pieds ;
m, n ; m', n' ; m'', n'' les segments formés par les hauteurs sur les côtés du triangle ;
r, ρ, ρ', ρ'' les rayons des cercles inscrit et ex-inscrits ;
R le rayon du cercle circonscrit ;
S la surface du triangle, $2p$ son périmètre $= a+a'+a''$.

On a les diverses relations connues et qu'il suffit de rappeler,

$$r = \sqrt{\frac{(p-a)(p-a')(p-a'')}{p}} \qquad \rho = \sqrt{\frac{p(p-a')(p-a'')}{p-a}}$$

$$\rho' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-a'')}{p-a'}} \qquad \rho'' = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-a')}{p-a''}}$$

$$R = \frac{aa'a''}{4\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}$$

$$\alpha = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a} \; ; \quad \alpha' = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a'} \; ; \quad \alpha'' = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')}}{a''} .$$

$$S = \frac{a\alpha}{2} = \frac{a'\alpha'}{2} = \frac{a''\alpha''}{2} = \sqrt{p(p-a)(p-a')(p-a'')} = r\,\frac{a+a'+a''}{2} = \frac{aa'a''}{4R}$$

$$S = \sqrt{r\rho\rho'\rho''}$$

et, comme

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} \;, \text{ on a } \quad S = \frac{\rho\rho'\rho''}{\sqrt{\rho\rho' + \rho\rho'' + \rho'\rho''}}$$

Des valeurs de R, α, α', α'', on déduit, par voie de multiplication,

$$\frac{R\alpha\alpha'\alpha''}{2} = S^2$$

et, par voie de multiplication et d'addition en même temps,

$$2R(\alpha+\alpha'+\alpha'') = aa'+aa''+a'a''.$$

La valeur de R, multipliée par celle de r, donne

$$Rr = \frac{aa'a''}{2(a+a'+a'')}$$

Des valeurs de ρ, ρ', ρ''; $\alpha', \alpha', \alpha''$ résulte la formule

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\rho\rho'\rho''} = \frac{2r}{R}$$

II. – Carnot, dans sa Géométrie de position, démontre les formules suivantes, qui sont autant de théorèmes sur les triangles :

$$\alpha\varepsilon = mn \quad ; \quad \alpha'\varepsilon' = m'n' \quad ; \quad \alpha''\varepsilon'' = m''n'' \qquad (1)$$

$$a^2+\varepsilon^2 = a'^2+\varepsilon'^2 = a''^2+\varepsilon''^2 = 4R^2 \qquad (2)$$

$$a\varepsilon = 2R\beta \qquad a'\varepsilon' = 2R\beta' \qquad a''\varepsilon'' = 2R\beta'' \qquad (3)$$

(β, β', β'' étant les longueurs des droites joignant deux à deux les pieds des hauteurs).

$$mm'm'' = nn'n''$$

$$e+e'+e'' = 2(R+r)$$

on a évidem^t.

$$a\alpha+a'\alpha'+a''\alpha'' = 6S \quad ; \quad a\varepsilon+a'\varepsilon'+a''\varepsilon'' = 2S$$

d'où l'on conclut

$$ae+a'e'+a''e'' = 4S$$

Cela posé, les formules (3) donnent

$$ae+a'e'+a''e'' = 2R(\beta+\beta'+\beta'')$$

d'où

$$S = R\,\frac{\beta+\beta'+\beta''}{2}$$

Donc La surface d'un triangle est égale au rayon du cercle circonscrit multiplié par le $\frac{1}{2}$ périmètre du triangle formé par les droites qui joignent les pieds des hauteurs.

III. – Les formules (2) conduisent, par voie

d'addition, à l'identité

$$a^2+a'^2+a''^2+e^2+e'^2+e''^2 = 12R^2$$

c.à.d. que La Somme des carrés des trois côtés d'un triangle et des trois droites joignant le point de Rencontre des hauteurs aux Sommets, est égale à 12 fois le carré du Rayon du cercle circonscrit.

Du premier théorème que nous venons d'énoncer, on déduit très simplement les formules

$$\frac{\beta+\beta'+\beta''}{\alpha} = \frac{a}{R} \qquad \frac{\beta+\beta'+\beta''}{\alpha'} = \frac{a'}{R} \qquad \frac{\beta+\beta'+\beta''}{\alpha''} = \frac{a''}{R}$$

$$\beta+\beta'+\beta'' = \frac{aa'a''}{2R^2} \qquad \frac{\beta+\beta'+\beta''}{a+a'+a''} = \frac{r}{R}$$

IV. Carnot démontre encore, et ce sont au Reste des formules connues,

$$2\alpha e = a'^2+a''^2-a^2 \quad , \quad 2\alpha'e' = a^2+a''^2-a'^2 \quad , \quad 2\alpha''e'' = a^2+a'^2-a''^2$$

d'où

$$a^2+a'^2+a''^2 = 2(\alpha e+\alpha'e'+\alpha''e'')$$

La Somme des carrés des trois côtés d'un triangle est égale à deux fois la Somme des produits des hauteurs par la portion de ces hauteurs comprise entre leur point de Rencontre et les Sommets du triangle.

V. On trouve facilement

$$m = \frac{a'^2+a''^2-a^2}{2a} = \frac{\alpha e}{a} \quad , \quad m' = \frac{\alpha'e'}{a'} \quad , \quad m'' = \frac{\alpha''e''}{a''}$$

On en déduit

$$\frac{mm'm''}{ee'e''} = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{aa'a''}$$

En cherchant de même les valeurs de $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, on sera conduit à l'expression

$$\frac{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''}{\alpha\alpha'\alpha''} = \frac{e^2e'^2e''^2}{a^2a'^2a''^2}$$

qui, combinée avec la précédente, donne

$$\frac{aa'a''}{mm'm''} = \frac{ee'e''}{\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''}.$$

Les valeurs de β, β', β'' en fonction des trois côtés sont

$$\beta = \frac{a}{2a'a''}(a'^2+a''^2-a^2) \quad , \quad \beta' = \frac{a'}{2aa''}(a^2+a''^2-a'^2) \quad , \quad \beta'' = \frac{a''}{2aa'}(a^2+a'^2-a''^2)$$

d'où

$$\frac{\beta\beta'\beta''}{\alpha\alpha'\alpha''} = \frac{ee'e''}{aa'a''} \quad \text{et, à cause de} \quad \frac{mm'm''}{ee'e''} = \frac{\alpha\alpha'\alpha''}{aa'a''},$$

$$mm'm'' = \beta\beta'\beta''$$

Le produit de trois segments formés sur les côtés d'un triangle par les hauteurs, égale le produit des trois droites qui joignent les pieds de ces hauteurs.

VI. Déterminons actuellem.t les côtés d'un triangle en fonction des rayons des trois cercles ex-inscrits.

Des valeurs de ρ, ρ', ρ'' on déduit

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{a+a''-a'}{a+a'-a''}, \quad \frac{\rho}{\rho''} = \frac{a'+a''-a}{a+a'-a''}$$

De là on tire facilement

$$a'-a'' = -a\frac{\rho-\rho'}{\rho+\rho'} \qquad a'+a'' = a\frac{2\rho\rho'+\rho''(\rho+\rho')}{\rho''(\rho+\rho')}$$

Substituant dans la valeur de ρ, faisant les calculs et réduisant, on trouvera

$$a = \frac{\rho''(\rho+\rho')}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}}$$

on aurait de même

$$a' = \frac{\rho'(\rho+\rho'')}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}}$$

$$a'' = \frac{\rho(\rho'+\rho'')}{\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}}$$

on conclut de là par addition

$$a+a'+a'' = 2\sqrt{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}$$

Par multiplication et addition

$$aa'+aa''+a'a'' = \frac{\rho\rho'\rho''(\rho+\rho'+\rho'')}{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''} + \rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''$$

$$= r\rho+r\rho'+r\rho''+\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''$$

Et enfin, par l'élévation au carré et l'addition

$$a^2+a'^2+a''^2 = \rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''+\frac{\rho^2\rho'^2+\rho^2\rho''^2+\rho'^2\rho''^2}{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}$$

VII. On trouve aussi très-facilement les longueurs des hauteurs en fonction de ces mêmes Rayons des cercles Ex-Inscrits, ces valeurs sont

$$\alpha = \frac{2\rho'\rho''}{\rho'+\rho''} \qquad \alpha' = \frac{2\rho\rho''}{\rho+\rho''} \qquad \alpha'' = \frac{2\rho\rho'}{\rho+\rho'}$$

on en déduit

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{8\rho^2\rho'^2\rho''^2}{(\rho+\rho')(\rho+\rho'')(\rho'+\rho'')} \quad \text{et, à cause de} \quad S^2 = \frac{R.\alpha\alpha'\alpha''}{2},$$

$$R = \frac{(\rho+\rho')(\rho+\rho'')(\rho'+\rho'')}{4(\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho'')}$$

En multipliant deux à deux les valeurs de $\alpha, \alpha', \alpha''$ et ajoutant, on a

$$\alpha\alpha'+\alpha\alpha''+\alpha'\alpha'' = \frac{8\rho\rho'\rho''(\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho'')}{(\rho+\rho')(\rho+\rho'')(\rho'+\rho'')}$$

et par suite, le rapport

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha'+\alpha\alpha''+\alpha'\alpha''} = \frac{\rho\rho'\rho''}{\rho\rho'+\rho\rho''+\rho'\rho''}$$

ou

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha'}+\frac{1}{\alpha''} = \frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}+\frac{1}{\rho''} = \frac{1}{r}$$

VIII. Si l'on déterminait ρ, ρ', ρ'' en fonction de $\alpha, \alpha', \alpha''$ on trouverait $\rho = \dfrac{\alpha\alpha'\alpha''}{\alpha\alpha'+\alpha\alpha''-\alpha'\alpha''}$ $\rho' = \ldots$ $\rho'' = \ldots$

IX. Si l'on cherche, en fonction des trois côtés, les distances mutuelles o, o', o'', $\omega, \omega', \omega''$ des centres des cercles inscrit et ex-inscrits, on trouve

$$o = a\sqrt{\frac{a'a''}{p(p-a)}} \qquad o' = a'\sqrt{\frac{aa''}{p(p-a')}} \qquad o'' = a''\sqrt{\frac{aa'}{p(p-a'')}}$$

$$\omega = a\sqrt{\frac{a'a''}{(p-a')(p-a'')}} \qquad \omega' = a'\sqrt{\frac{aa''}{(p-a)(p-a'')}} \qquad \omega'' = a''\sqrt{\frac{aa'}{(p-a)(p-a')}}$$

Des trois dernières égalités, on déduit

$$\omega\omega'\omega'' = 8R^2(a+a'+a'')$$

X. Si l'on se rappelle l'expression $aa'a'' = 2R^2(\beta+\beta'+\beta'')$, et si l'on remarque en outre que les côtés a, a', a'' sont précisément les droites joignant les pieds des hauteurs du triangle dont les côtés sont ω, ω', ω'', on en conclura que le rayon R' du cercle circonscrit à ce dernier triangle est égal à $2R$; et on aura aussi

$$o^2+o'^2+o''^2+\omega^2+\omega'^2+\omega''^2 = 12R'^2 = 48R^2$$

XI. actuellemt. D, Δ, Δ', Δ'' étant les distances du centre du cercle circonscrit à chacun des centres des cercles inscrit et ex-inscrits, on sait que l'on a

$$D^2 = R^2 - 2Rr\,,\quad \Delta^2 = R^2+2R\rho\,,\quad \Delta'^2 = R^2+2R\rho'\,,\quad \Delta''^2 = R^2+2R\rho''.$$

D'où, à cause de $4R = \rho+\rho'+\rho''-r$,

$$D^2+\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2 = 12R^2$$

Par conséquent

$$o^2+o'^2+o''^2+\omega^2+\omega'^2+\omega''^2+D^2+\Delta^2+\Delta'^2+\Delta''^2 = 60R^2$$

ce qui donne ce théorème

La somme des carrés des 10 droites joignant deux à deux les centres des cercles circonscrit, inscrit et ex-inscrits à un même triangle, est égale à 60 fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

XII. En passant des valeurs de ω, ω', ω'', o, o', o'' au triangle primitif, on trouverait en fonction des trois droites β, β', β'' les côtés et segments a, a', a'', e, e', e''. Voici ces formules

$$a = 2\beta\sqrt{\frac{\beta'\beta''}{(\beta+\beta'-\beta'')(\beta+\beta''-\beta')}}$$

$$a' = \cdots$$

$$a'' = \cdots$$

$$e = 2\beta\sqrt{\frac{\beta'\beta''}{(\beta+\beta'+\beta'')(\beta+\beta''-\beta')}}$$

$$e' = \cdots$$

$$e'' = \cdots$$

XIII. En déterminant les distances du centre du cercle inscrit aux sommets du triangle, et rapportant les formules

au triangle primitif, on obtiendra facilement

$$\alpha = \sqrt{\frac{\beta'\beta''(\beta+\beta'+\beta'')}{\beta'+\beta''-\beta}} \qquad \alpha' = \ldots \qquad \alpha'' = \ldots$$

ce qui conduira par des calculs très simples à la formule

$$\beta^2\beta'^2\beta''^2 = \alpha\alpha'\alpha''.\ \varepsilon\varepsilon'\varepsilon''.$$

C.à.d. que dans un triangle, le produit des trois droites qui joignent les pieds des hauteurs, élevé au carré, égale le produit de ces hauteurs par le produit des trois segments compris entre leurs pieds et leur point de rencontre.

XIV. Des valeurs de e, e', e'', $\alpha, \alpha', \alpha''$ on déduit facilemt.

$$\frac{e}{\alpha} + \frac{e'}{\alpha'} + \frac{e''}{\alpha''} = 2$$

on aurait aussi

$$\frac{\alpha\alpha'\alpha''}{ee'e''} = \frac{(\beta+\beta'+\beta'')^3}{8\beta\beta'\beta''}$$

Les valeurs de $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ seront

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\beta'\beta''(\beta'+\beta''-\beta)}{\beta+\beta'+\beta''}} \qquad \varepsilon' = \ldots \qquad \varepsilon'' = \ldots$$

et par suite

$$\frac{\varepsilon}{\alpha} + \frac{\varepsilon'}{\alpha'} + \frac{\varepsilon''}{\alpha''} = 1$$

on a encore

$$\alpha\varepsilon = \beta'\beta'' \qquad \alpha'\varepsilon' = \beta\beta'' \qquad \alpha''\varepsilon'' = \beta\beta'$$

et

$$e\varepsilon = e'\varepsilon' = e''\varepsilon'' = \frac{2\beta\beta'\beta''}{\beta+\beta'+\beta''}$$

XV. Théorème. Dans un triangle qcq. la droite joignant deux points de contact du cercle inscrit, la droite joignant les pieds de deux hauteurs, et celle enfin joignant les points de rencontre de deux bissectrices avec les côtés opposés, vont concourir en un même point.

On détermine ainsi trois points. Les droites joignant ces points deux à deux iront passer par les sommets du triangle, et de plus ces trois points seront tels que l'un qcq. d'entre eux sera le pôle de la droite joignant les deux autres, par rapport au cercle inscrit.

448. Sur les Normales aux Coniques.

Si d'un point qcq. N ayant (α, β) pour coordonnées on mène des normales à la parabole $y^2=2px$, on sait qu'il peut y avoir jusqu'à 3 Normales, et que les coordonnées de leurs pieds sont déterminées par l'Eq. du 3e. Degré

$$y^3+2p(p-\alpha)y-2p^2\beta=0 \qquad (1)$$

L'Eq. de la circonférence de cercle passant par les pieds des normales sera $(x-A)^2+(y-B^2)=R^2$; combinant cette Eq. avec celle de la parabole $y^2=2px$, et éliminant x, on a l'Eq. du quatrième degré

$$y^4+4p(p-A)y^2-8p^2By+4p^2(A^2+B^2-R^2)=0 \qquad (2)$$

qui aura trois Racines $y_1\ y_2\ y_3$ identiques avec celles de l'Eq. (1); et comme les seconds termes manquent dans les Eq. (1) et (2), il est facile d'en conclure que la 4e. Racine y_4 de l'Eq. (2) est égale à Zéro. Donc

La circonférence de cercle passant par les pieds des trois normales à une parabole, issues d'un même point, passe aussi par le sommet de la courbe, et réciproquement, si l'on fait passer une circonférence de cercle par le sommet d'une parabole, les normales à la parabole aux trois points de rencontre de cette courbe avec la circ., iront concourir en un même point.

De là un moyen très-simple de mener les normales à une parabole par un point donné qcq. Et en effet, si de l'Eq. (2) on fait disparaître la Racine $y_4=0$, on aura l'Eq.

$$y^3+4p(p-A)y-8p^2B=0 \qquad (3)$$

et l'Eq. (3) étant identique à l'Eq. (1), puisqu'elles ont mêmes Racines $y_1\ y_2\ y_3$, on en déduira

$$4p(p-A)=2p(p-\alpha) \quad \text{et} \quad -8p^2B=2p^2\beta$$

d'où

$$A=\frac{p+\alpha}{2} \quad \text{et} \quad B=\frac{\beta}{4}$$

Par conséquent le centre de la circonférence passant par

les pieds des normales issues du point N, se détermine par une construction on ne peut plus simple, et son rayon $R = \sqrt{A^2+B^2}$ est connu, puisque la circonf. passe par le sommet de la parabole.

Si A, B, C sont les pieds des normales issues du point N, il est facile de voir que (F étant le foyer de la parabole)

$$FA + FB + FC = 2\alpha - \frac{p}{2}$$

Si le point N était situé sur l'axe de la parabole, il existerait d'après cela un moyen plus simple encore que la méthode générale pour construire les normales: du foyer F comme centre, on décrirait un arc de cercle avec FN pour rayon; en joignant au point N les points où cet arc de cercle rencontre la parabole, on aurait deux normales: l'axe lui-même est évidemment la 3e.

---

449. Théorème. — Toutes les Hyperboles équilatères circonscrites à un triangle se coupent au point de rencontre des hauteurs du triangle.

Soit ABC le triangle, prenons le sommet A pour origine, la direction AB pour axe des $+x$, les coordonnées rect. et faisons $AB = E$. Deux Hyp. Eq. passant par les points A et B auront pour Eq.

$$y^2 + Bxy - x^2 + Dy + Ex = 0 \quad \text{et} \quad y^2 + B'xy - x^2 + D'y + Ex = 0$$

donc les deux autres points d'intersection sont situés sur la droite $x(B-B') + D - D' = 0$, c.a.d. sur une droite perp. à AB; mais C est un point d'intersection, donc le second point est sur la hauteur passant par C, de même sur la hauteur passant par A, etc. .... cqfd.

De là résulte

Théorème. Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle inscrit dans une Hyp. Eq. est situé sur la courbe.

150. Théorème. Les Directrices de toutes les Paraboles inscrites à un Triangle passent par le point de Rencontre des hauteurs de ce Triangle.

Soit ABC le Triangle, prenons A pour origine, AB pour axe des $+x$, AC pour axe des $+y$. l'Eq. de la parabole peut être mise sous la forme

$$p^2y^2 - 2pqxy + q^2x^2 - 2py - 2qx + 1 = 0 \qquad (1)$$

L'Eq. de la directrice est

$$y(q + p\cos\theta) + x(p + q\cos\theta) \pm \cos\theta = 0 \qquad (2)$$

Soit $dy + ex + f = 0$ l'Eq. de BC, la condition de Tangence donne

$$dfq + efp + de = 0 \qquad (3)$$

Eliminant q entre (2) et (3), on a

$$pf\left[y(d\cos\theta - e) + x(d - e\cos\theta)\right] \mp d(ey + ex\cos\theta + f\cos\theta) = 0$$

Or cette droite passe constamment par le point d'intersect. des deux droites

$$y(d\cos\theta - e) + x(d - e\cos\theta) = 0 \quad , \quad ey + ex\cos\theta + f\cos\theta = 0$$

La 1ère est l'Eq. de la hauteur du Triangle passant par l'origine A, et la seconde est l'Eq. de la hauteur passant par B ; donc ... &c.

De là Résulte

Théorème. Le point de Rencontre des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est situé sur la directrice de cette courbe.

151. Théorème. Prenant tous les nombres entiers depuis 2 jusqu'à l'infini, et élevant chacun à toutes les puissances négatives, depuis la 2e. jusqu'à l'infini, la somme est égale à l'Unité (Steiner).

on a en effet

$$\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^4} + \cdots$$

faisant successivement $a = 2, 3, 4, 5, \ldots$ le second membre donne toutes les puissances négatives des nombres entiers, et le premier membre devient successivement

$$1-\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\,,\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\,,\ \dots$$

dont la somme est égale à l'unité. c.q.f.d.

Observation. — On a aussi

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}+\cdots$$

Faisant successivement $a=2,3,4,5,\dots$ et ajoutant les ég. on conclut que la somme des puissances négatives paires des nombres entiers, l'unité exclue, moins la somme des puissances impaires, est égale à $\frac{1}{2}$; donc la somme des puissances négatives paires $=\frac{3}{4}$, et celle des puissances négatives impaires $=\frac{1}{4}$.

452.

Théorème. — Le produit de deux facteurs dont la somme est constante est maximum quand ils sont égaux.

Car si l'on représente ces facteurs par $p-\delta$ et $p+\delta$ le produit $p^2-\delta^2$ est maximum quand $\delta=0$.

Théorème. — Le produit de n facteurs dont la somme est constante, est maximum quand ils sont égaux.

Car s'il y en avait deux d'inégaux, on pourrait les remplacer par deux autres égaux et faisant la même somme, et le produit total augmenterait.

Problème. Partager une quantité a en un nombre qcq. de parties $x, y, z, \dots t$ de façon que

$$x+y+z+\dots+t=a$$

$$x^m . y^n . z^p \dots t^r = \text{maximum}.$$

$m, n, p, \dots r$ étant donnés.

La dernière condition peut s'écrire

$$\left(m^m . n^n . p^p \dots r^r\right)\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n\left(\frac{z}{p}\right)^p\dots\left(\frac{t}{r}\right)^r=\text{maxim}.$$

Le premier facteur entre parenthèses est constant. Donc il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(\frac{x}{m}\right)^m\left(\frac{y}{n}\right)^n\dots\ =\text{max}.$$

Or ce produit se compose de m facteurs égaux à $\frac{x}{m}$, et dont la somme est x avec n facteurs égaux à $\frac{y}{n}$ et dont la somme est y, et

ainsi de suite. Donc il se compose d'un certain nombre constant $m+n+\dots$ de facteurs dont la somme est $x+y+\dots$ ou a. Donc tous les facteurs doivent être égaux, et chacun d'eux sera

$$\frac{a}{m+n+p+\dots+r}$$

Donc

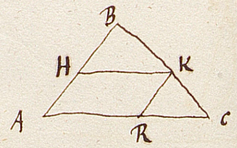
$$x = \frac{ma}{m+n+p+\dots}$$

$$y = \frac{na}{m+n+p+\dots}$$

etc.

On peut étendre cela au cas où $m, n, \dots$ seraient fractionnaires, en remarquant qu'on peut élever tout à une puissance marquée par le produit de leurs dénominateurs.

Problème. Inscrire dans un triangle ABC un parallélogramme HR tel que $\overline{HK}^m \cdot \overline{KR}^n = \max$.



On a la proportion

$$HK : HB :: AC : AB$$

Donc

$$\overline{HK}^m \cdot \overline{KR}^n = \left(\frac{AC}{AB}\right)^m \overline{HB}^m \, \overline{HA}^n$$

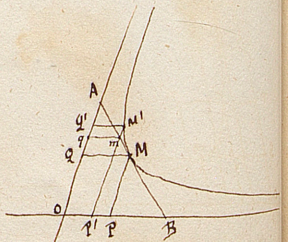
Pour que le 2d. membre soit maximum, il faut et il suffit que $\overline{HB}^m \cdot \overline{HA}^n$ le soit. or $HB + HA = AB = \text{Const.}$

Donc

$$\begin{cases} HB = \dfrac{m}{m+n} AB \\ HA = \dfrac{n}{m+n} AB \end{cases}$$

ou encore, HB et HA sont entre eux dans le rapport de m à n.

Problème. — Par un point pris sur une hyperbole qcq. $x^m y^n = a^{m+n}$, mener une tangente à cette hyperbole.



Soit AMB la tang. menée. On aura

$$\overline{Mq}^m \cdot \overline{MP}^n = a^{m+n}$$

Soit M' un point voisin. De même

$$\overline{M'Q'}^m \cdot \overline{M'P'}^n = a^{m+n}$$

Donc, puisque AMB est Tangente,

$$\overline{MQ}^m \cdot \overline{MP}^n > \overline{mq}^m \cdot \overline{mP'}^n$$

Donc le produit $\overline{MQ}^m \cdot \overline{MP}^n$ est maximum. Donc

La Sous-Tangente AQ est à l'ordonnée OQ dans le Rapport de m à n. — D'où la construction.

Dans l'hyperbole ordinaire, ce Rapport est l'Unité.

Théorème. Dans une hyperbole ordinaire, les deux parties d'une même Sécante comprises entre la courbe et l'asymptote, sont égales.

Car soit

$$xy = m^2$$

l'Eq. de la Courbe. on en déduit

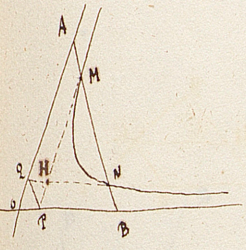
$$MP.HQ = NQ.HP$$

d'où

$$MP : HP :: NQ : HQ$$

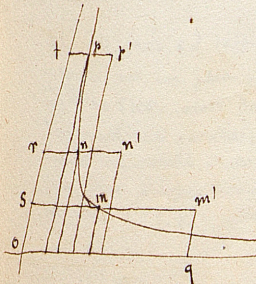
$$MP - HP \text{ ou } MH : NQ - HQ \text{ ou } NH :: HP : HQ$$

Donc PQ est parallèle à AB. Donc PQ = AM = NB
C.Q.F.D.



Corollaires. Tout système de Sécantes parallèles à un Diamètre Rectiligne. — Toute droite menée par le centre est un Diamètre. — Les deux parties de la Tangente comprises entre le point de contact et chaque asymptote, sont égales.

Théorème. — L'aire comprise entre une ordonnée de l'hyperbole ordinaire, l'asymptote et la courbe, est Infinie: — et le Solide engendré par la Révolution de l'aire autour de l'asymptote, est fini.



En effet, cette aire est plus grande que la somme des parallélogrammes mo, ns, pr... or, si j'ai pris les hauteurs de ces parallélogrammes telles que or = 2os, ot = 2or, etc. comme d'ailleurs op = on = om, on voit que

$sn = \frac{1}{2}\, om$, $rp = sn$, etc. Donc l'aire en question est plus grande que om + une infinité de fois sn. Donc elle est infinie. — au contraire, le volume qu'elle décrit est plus petit que la somme des cylindres dont les bases sont sm', rn', tp'... or ces bases sont telles que chacune est la moitié de la précédente. Les hauteurs (à partir du cylindre rn') sont telles que chacune est double de la précédente. Donc chaque cylindre est la moitié du précédent. Donc leur somme est

$$\text{Cyl. } sm' + \text{cyl. } rn'\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$$

La parenthèse $= 2$. Donc ... c q f d.

453. Trouver l'aire d'un polygone en fonction des coordonnées de ses sommets.

Soient c, c', c''.. les côtés successifs, (α, β), (α', β').. les sommets. — Si d'un point intérieur $x'\ y'$ on abaisse sur les côtés des perp., elles seront

$$\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}}, \quad \frac{y' - a'x' - b'}{\sqrt{1+a'^2}}, \cdots$$

$y = ax + b$ étant l'éq. de c, etc. Donc, si P est l'aire du polygone,

$$2P = c\,\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1+a^2}} + c'\,\frac{y' - a'x' - b'}{\sqrt{1+a'^2}} + \cdots$$

$$= Ay' - Bx' - C$$

Mais P est indépendant de x' et de y'. Donc

$$A = 0 \qquad B = 0$$

Donc

$$2P = -\frac{bc}{\sqrt{1+a^2}} - \frac{b'c'}{\sqrt{1+a'^2}} - \text{etc.}$$

or

$$b = \beta - \alpha\,\frac{\beta - \beta'}{\alpha - \alpha'} = \frac{\alpha\beta' - \beta\alpha'}{\alpha - \alpha'}$$

$$\frac{c}{\sqrt{1+a^2}} = c \cos\gamma = \alpha' - \alpha$$

Donc

$$2P = \alpha\beta' - \beta\alpha' + \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'' + \text{etc.}$$

On peut y arriver autrement. — En effet, un polygone dont toutes les parties sont situées dans l'un des angles des axes coordonnés peut être considéré comme la différence entre un polygone convexe et un concave par rapport à l'axe des x par exemple. alors, en évaluant les trapezes, on aura évidemment, à cause des signes,

$$2P = (\alpha - \alpha')(\beta + \beta') + (\alpha' - \alpha'')(\beta' + \beta'') + \cdots$$

le dernier terme de chaque produit est détruit par le premier du produit suivant. donc ...

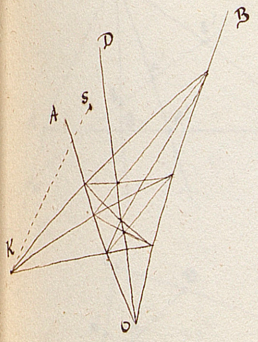
ou bien encore : $2P$ peut encore s'écrire

$$2P = (\alpha + \alpha')(\beta - \beta') + (\alpha' + \alpha'')(\beta' - \beta'') + \cdots$$

en ajoutant à l'expression précédente et divisant par 2, on retrouve l'expression cherchée.

L'Eq. $A = 0$ prouve que la somme des projections des côtés sur un axe fixe est nulle.

Ceci peut s'étendre aux tétraèdres (J. de l'Ec. Pol. T. XII.)



454. Théorème. Si d'un point K on mène diverses sécantes à un angle AOB, les droites qui joignent en croix les points d'intersection se coupent sur une même droite OD passant par le sommet O.

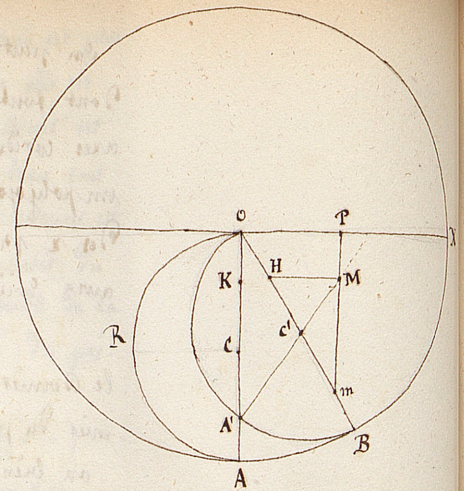
Pour le démontrer, il suffit de prendre un point S en dehors du plan de la figure, et d'en prendre la perspective sur un plan parallèle à SK. alors les sécantes deviennent parallèles, et le théorème est connu dans ce cas.

(Chercher si l'on peut démontrer ainsi que OD est invariable quel que soit K sur OK[x]).

Même théorème et même démonstration pour une section conique qcq.

(x) C'est facile : il suffit de projeter sur un plan parallèle au plan SKO. alors OA et OB deviennent aussi parallèles, et OD devient une parallèle à celles-ci, menée entre deux à égale distance de chacune (V.E.M.).

455. Théorème. – Si un cercle c roule dans l'intérieur d'un autre de rayon double, un point qcq. K de l'intérieur de ce cercle C décrit une ellipse.



Soit ORA la position initiale, telle que O, K, C et le point de contact A soient sur un même diamètre OA. – D'abord, je dis que, dans une autre position OB, A sera en A' : car angle $A'C'B = A'OC' + OA'C' = 2AOB$,

ou $\frac{\text{arc } A'B}{C'B} = 2\frac{\text{arc } AB}{OA}$, ou $\frac{\text{arc } A'B}{\frac{1}{2}OA} = \frac{\text{arc } AB}{\frac{1}{2}OA}$,

$A'B = AB$. Donc un point A de la circonférence du petit cercle décrit un diamètre AO du grand.

Maintenant, le point K sera arrivé en M si $C'M = CK$. menant mMP perp. et MH parallèle à OX, je vois que $C'M = C'm = C'H$. Donc le point m décrit un cercle de rayon $om = oc + CK = r + d$. D'ailleurs les triangles semblables mOP, mHM donnent

$$mM : mP :: mH \text{ ou } 2d : mo \text{ ou } r+d$$

d'où

$$MP : mP - mM \text{ ou } MP :: r+d : r-d$$

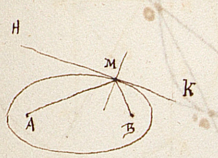
$$\frac{MP}{mP} = \frac{r-d}{r+d} = \text{Const.}$$

propriété caractéristique de l'ellipse. – Donc le point M décrit bien une ellipse dont les demi-axes sont $r-d$ et $r+d$.

On peut encore le voir autrement. – Il suffit de remarquer que le point K est lié invariablement aux deux extrémités du diamètre AO qui passe par lui, et que ces deux extrémités décrivent deux diam. perp. dans le grand cercle. Donc le point K est un point d'une droite de longueur constante qui s'appuie sur deux droites rectangulaires. Donc le lieu qu'il décrit est bien une ellipse.

456. Th. Dans la Logarithmique, $y = a^x$, la Sous-Tangente est constante.

Car il est facile de voir que, pour une sécante MM', la Sous-Sécante s est $s = y \cdot \frac{x'-x}{y'-y} = \frac{a^x(x'-x)}{a^{x'}-a^x} = \frac{x'-x}{a^{x'-x}-1}$ et est constante si $x'-x$ est constant, mais qcq. d'ailleurs. Donc il en est de même pour la Sous-Tangente.

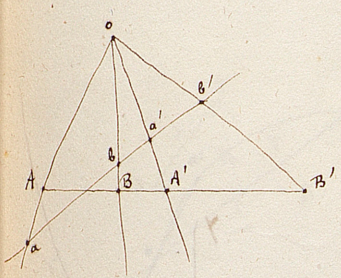


457. En un point M d'une Ellipse, la Normale bissecte l'angle des deux Rayons vecteurs.

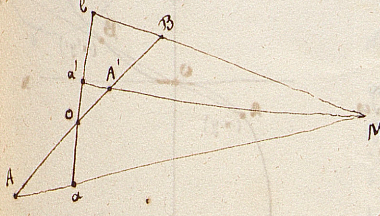
On mène la bissectrice de AMB, la perp. HK à cette bissectrice : HK est Tg. à la courbe. _ Car on sait que AMB est le plus court chemin de A à B en touchant HK. Donc un point M, et un seul, jouit de la propriété caractéristique de tous les points de l'Ellipse : Donc HK est Tangente.

---

458. Sur les courbes du 3e. degré.



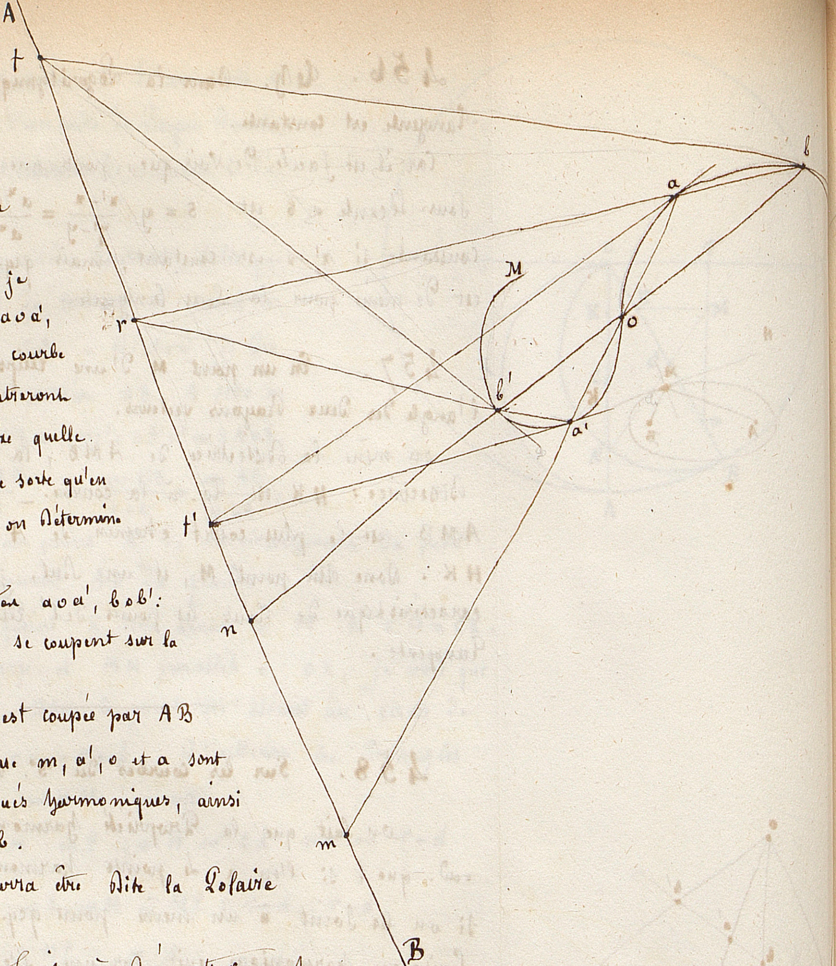
On sait que la propriété harmonique est projective : c.a.d. que, si l'on a 4 points harmoniques A, B, A', B', si on les joint à un même point qcq. O, on aura un faisceau harmonique qui, sur une sécante qcq. $aa'bb'$ déterminera quatre points harmoniques.



D'après cela, il est évident que, si l'on donne deux systèmes de points harmoniques $AOA'B$ et $aoa'b$ ayant un point commun O, si l'on joint les points correspondants bB, $a'A'$, aA, on aura trois droites qui se couperont en un même point M. Car, si cela n'était pas, soit M le point de rencontre de bB et de $a'A'$. Je joindrai Ma. Je dis que Ma passe par A. Car sinon .. etc.

cqfd.

Cela posé :



Théorème. —

Etant donnée une courbe qcq. MN du 3e. degré, O étant un de ses points d'inflexion :

1°. Si, par le point o je mène une sécante qcq. aoa', les deux tangentes à la courbe at' et a't' se rencontreront sur une droite AB, fixe quelle que soit la sécante, de sorte qu'en menant deux sécantes, on détermine la droite.

2°. Soient deux sécantes aoa', bob' : les droites ba, a'b' se coupent sur la droite AB.

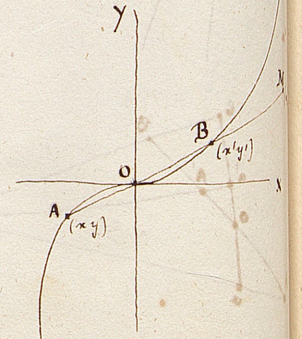
3°. Chaque sécante est coupée par AB en un point tel que m, a', o et a sont deux à deux conjugués harmoniques, ainsi que n, b', o et b.

La droite AB pourra être dite la Polaire du point o.

Tout cela est facile à démontrer. — Je vais chercher à démontrer d'abord la 3e. partie du Théorème : les deux autres s'ensuivront nécessairement.

L'Eq. générale des courbes du 3e. degré est

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$



Prenons pour origine le point d'inflexion, et pour axe des x la tangente en ce point. — alors, pour $y = 0$, je devrai trouver pour x trois valeurs nulles. — Pour $y = 0$, l'Eq. ci-dessus donne

$$dx^3 + Cx^2 + Ex + F = 0$$

Donc $F = 0$, $E = 0$, $C = 0$, et l'Eq. générale devient

$$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + Ay^2 + Bxy + Dy = 0 \quad (1)$$

à présent, menons une sécante AOB, et cherchons le lieu des points M conjugués harmoniques de O par rapport à A et B. On aura

$$AO.MB = OB.AM$$

ce qui donne

$$x_1 = 2\,\frac{xx'}{x+x'}.$$

Pour avoir x et x', soit $y = mx$ l'Eq. de la sécante: faisant $y = mx$ dans l'Eq. (1), j'aurai, en divisant ensuite par x,

$$(am^3 + bm^2 + cm + d)x^2 + (Am^2 + Bm)x + Dm = 0 \qquad (2)$$

les racines sont x et x'. or cette Eq. donne

$$\frac{xx'}{x+x'} = -\frac{Dm}{Am^2+Bm} = -\frac{D}{Am+B}$$

ceci est égal à $\frac{1}{2}x_1$. D'ailleurs M est sur la sécante. Donc $m = \frac{y_1}{x_1}$. Donc

$$x_1 = -\frac{2D}{A\frac{y_1}{x_1}+B}$$

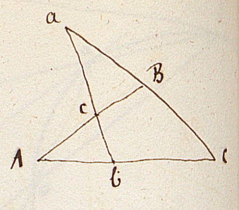
$$Ay_1 + Bx_1 + 2D = 0$$

ce qui montre que le lieu des points M est une ligne droite.

Cela démontré, le reste en est une conséquence. Car: — si l'on mène deux sécantes bob', aoa', il suit des propriétés du faisceau harmonique que j'ai rapportées en commençant, que les droites $a'b'$, ab concourent sur le lieu trouvé, qui est la droite joignant les conjugués harmoniques de O par rapport à (a, a') et à (b, b'). — Enfin, si l'on suppose que la sécante bb' se rapproche indéfiniment de la sécante aa', on voit que les tangentes en a et en a' concourront aussi sur la même droite.

---

159. Théorème fondamental de la théorie des transversales. Démonstration par la statique.



Soit ABC un triangle, coupé par la transversale abc. aux points a, C et A j'applique des forces a', C', A'. a' est qcq. C' et A' sont telles que les points B et b sont respectivemt. les centres de gravité de aC et de CA. Il suit delà que c sera le centre de gravité du système aCA. — Maintenant, j'aurai

$$aB : CB :: C' : a'$$

d'où

$$aB + BC \text{ ou } aC : aB :: a' + C' : C' \qquad (1)$$

de même

$$Ab : Cb :: C' : A' \qquad (2)$$

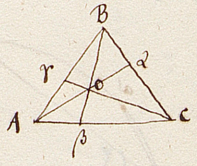
de plus, c étant le centre de gravité de AB (en A la force A', en B la force a' + C'), on a

$$Bc : Ac :: A' : a' + C' \qquad (3)$$

Multipliant terme à terme les prop. (1), (2) et (3) j'ai

$$aC . Ab . Bc = aB . Cb . Ac$$

c.q.f.d.



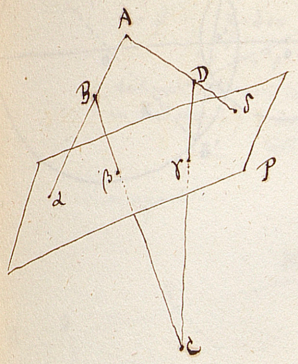
2°. De même pour trois droites Aα, Bβ, Cγ qui se coupent en O et qui aboutissent aux sommets d'un triangle. appliquons en A, B, C trois forces A', B', C' telles que γ et α soient respectivemt. les centres de gravité des côtés AB et BC. Le centre de gravité des forces A', B', C' sera en O. d'où il suit que β sera le centre de gravité de AC. Car, quel que soit ce centre, en le joignant à B, il devra contenir le centre de gravité O du système total. — D'après cela, on aura

$$\begin{cases} A\gamma : B\gamma :: B' : A' \\ B\alpha : C\alpha :: C' : B' \\ C\beta : A\beta :: A' : C' \end{cases}$$

d'où

$$A\gamma . C\beta . B\alpha = A\beta . B\gamma . C\alpha \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Théorème. Quand un plan coupe les quatre côtés d'un quadrilatère gauche qcq. il détermine sur ces côtés, à partir des sommets, 8 segments tels que le produit de 4 non consécutifs est égal au produit des quatre autres.



Même démonstration. J'applique aux quatre sommets A, B, C, D quatre forces parallèles dont les résultantes tombent, pour AD en δ, pour BC en γ, pour CB en β. Evidemt. le point d'application de la résultante totale est sur le plan P. Il est de plus sur la droite βδ. Il doit être encore sur celle qui joindra γ au centre de gravité de AB (ce mot étant employé ici dans un sens plus étendu que de coutume) : ce centre de gravité ne peut donc être que α, puisqu'il est nécessairement sur AB et dans le plan P. — On aura donc une série de proportions, d'où

$$A\delta \cdot D\gamma \cdot C\beta \cdot B\alpha = D\delta \cdot C\gamma \cdot B\beta \cdot A\alpha$$

cqfd.

Ce mode de démonstration est évidemment général.

Si l'on prend un polygone gauche de n sommets A, B, C, .. M, N, coupé par un plan aux n points α, β, γ, ... μ, ν : on appliquera aux n sommets autant de forces A', B', C', ... M', N', telles que les points α, β, γ, ... et μ soient respectivemt. les centres de gravité des côtés AB, BC, ... MN. Restera le point ν qu'il faudra démontrer être le centre de gravité de NA. Or cela est évident. Car, tous les centres de gravité étant dans le plan sécant P, le centre du système y sera aussi. D'ailleurs il est facile de concevoir que le centre de gravité de toutes les forces moins N' et A' est sur le plan P. En le joignant au centre de gravité de AN, on aura une droite qui contiendra le centre de gravité total, lequel est sur P. Donc le centre de gravité de AN est en ν. — De là on conclura les proportions successives qui, multipliées entre elles, con-

-duisent à ce Résultat

Théorème. — Quand un polygone gauche qcq. a tous ses côtés, en nombre n, coupés par un plan, ce plan détermine, à partir des sommets, $2n$ segments tels que le produit de n d'entre eux non consécutifs est égal au produit des n autres.

Il est facile de voir que, quand un des côtés devient parallèle au plan sécant, les deux segments interceptés sur ce côté, qui deviennent infinis, doivent être considérés comme égaux, et par conséquent supprimés dans cette Relation. — En effet, supposons que cette égalité soit la suivante.

$$a\,b\,c\,d\ldots = a'b'c'd'\ldots$$

et supposons que ce soient les deux segments a et a' qui soient infinis. — Considérons une position du plan infiniment ± voisine de la précédente, et telle que a et a' ne soient plus infinis. Soit d leur différence (qui est égale au côté sur lequel ils sont comptés). L'Eq. ci-dessus deviendra, en désignant par des lettres grecques les valeurs nouvelles des segments :

$$\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta\ldots = (\alpha + d)\,\beta'\gamma'\delta'\ldots$$

ou

$$\frac{\alpha}{\alpha + d}\,\beta\gamma\delta\ldots = \beta'\gamma'\delta'\ldots$$

$$\frac{1}{1 + \frac{d}{\alpha}}\,\beta\gamma\delta\ldots = \beta'\gamma'\delta'\ldots$$

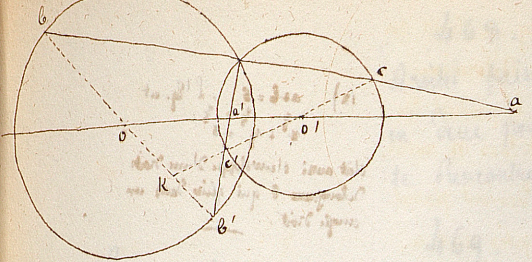
et, à la limite, pour $\alpha = \infty$,

$$b\,c\,d\ldots = b'c'd'\ldots \qquad \text{cqfd.}$$

460. On a deux cercles qui se coupent. — On mène ab et $a'b'$ perp. l'un sur l'autre. On aura

$$\frac{ac}{ab} = \frac{a'c'}{a'b'}$$

Je joins cc' et bb'. Soit $ob = R$ et $o'c' = r$.



J'applique la théorie des transversales.

Transversale unique, OO'.

Triangle bcK $\quad ba.r.OK = ca.R.O'K$

" $\quad b'c'K$ $\quad b'a'.r.OK = c'a'.R.O'K$

d'où
$$\frac{ba}{b'a'} = \frac{ca}{c'a'}$$
c.q.f.d.

on peut discuter.

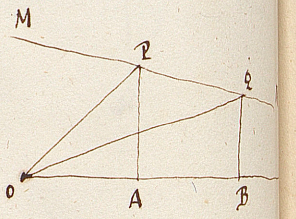
Énoncés de Problèmes.

Géométrie analytique.

(x) $a+b=s$. L'Eq. est $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=s^{\frac{2}{3}}$

C'est aussi l'enveloppe d'une droite de longueur s qui glisse dans un angle droit.

461. Enveloppe des Ellipses où $a+b=$ Const. (x)



462. — On a $OA.OB=K^2$, et l'on détermine MN telle que $\frac{OP}{OQ}=\frac{m}{n}$. Enveloppe de MN. — Cas particulier où $\frac{m}{n}=\frac{K}{OB}$.

463. Si l'on a une Section conique inscrite dans un angle, et si l'on joint les points de contact, on forme un triangle. D'un point qcq. de la courbe on abaisse des perp. sur les 3 côtés de ce triangle. Le produit des perp. abaissées sur les côtés de l'angle, divisé par le carré de la 3e. donne un quotient constant.

464. Soient deux quadrilatères, l'un inscrit, l'autre circonscrit à une Ellipse, et tels que les points de contact des côtés du second soient les sommets du premier. Les quatre diagonales se coupent en un même point.

465. XY se meut parallèlement à elle-même. MA + MB = minimum. Lieu de M. (Hyp. Equilatère).

466. D'un point fixe on mène des Sécantes à une droite fixe, et, par les points d'intersection, on élève des perp. à ces Sécantes. Enveloppe de ces perp. (Parabole).

467. Lieu des pieds des normales menées d'un point

fixe aux cercles qui ont même axe Radical.

468. Par le foyer d'une Ellipse, on mène deux droites faisant un angle constant : elles Rencontrent l'ellipse en deux points par lesquels on mène deux Tangentes, qui se Rencontrent en M. Lieu des points M.

Remarquable.

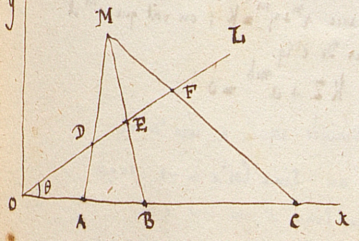
469. Etant données deux Tangentes à une parabole, si, d'un point de la corde de contact, on mène des parallèles aux Tangentes, la diagonale du parallélogramme ainsi formé est Tangente à la courbe.

470. Lieu des centres des cercles Tangents à une ellipse et à sa directrice.

471. La partie de l'asymptote d'une hyperbole comprise entre le centre et la directrice est égale au Grand axe.

472. Si l'on prend deux points fixes sur une branche d'hyperbole, et qu'on les joigne à un point qcq. de l'autre Branche, ces deux droites interceptent sur les asymptotes des longueurs constantes.

473. Enveloppe des circonférences décrites sur les Rayons vecteurs d'une Section conique.



474. Ox est fixe, ainsi que A, B, C. – L'angle θ étant qcq. on prend D, E, F. tels que AD, BE, CF passent par un même point M.

1°. Ces trois droites passent toujours par un même point, si θ varie, les six points étant fixes.

2°. Trouver alors le lieu de M.

3°. Trouver ce lieu, si OL se meut non seulement dans le plan YOX, mais dans l'espace.

475. Eq. de la développante de cercle.

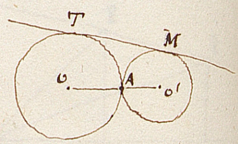
476. D'un point on mène des normales à des Ellipses homofocales. Trouver

1°. Le lieu de leurs pieds.

2°. Le lieu des points de contact des tangentes menées du même point aux Ellipses.

3°. Le lieu des pieds des perp. abaissées sur les cordes de contact.

477. $OA = \text{Const}$. O et A fixes. $O'A$ variable. Lieu de M.



478. Enveloppe du côté d'un angle droit dont le sommet s'appuie sur une droite fixe, et dont l'autre côté passe par un point fixe. (*)

(*) Parabole dont ce point fixe n'est pas le foyer. (Très-facile.)

479. Par le foyer d'une Ellipse, on mène des parallèles à deux diam. conj. Ces parallèles rencontrent l'Ellipse en deux points par lesquels on mène des Tang. Lieu des points de concours de ces Tg.

480. Démontrer que si

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \qquad \operatorname{tg} y = \frac{1}{8} \qquad \operatorname{tg} z = \frac{1}{5}$$

on a

$$x + y + z = 45^\circ.$$

481. Résoudre

$$\begin{cases} x^m + y^m = k \\ \mathcal{L}x + \mathcal{L}y = h \end{cases}$$

la base a est donnée.

La seconde Eq. donne $\mathcal{L}(xy) = h$ d'où $xy = a^h$ et $x^m y^m = a^{mh}$; avec $x^m + y^m = k$; on voit que x^m et y^m sont les racines de l'Eq.

$$z^2 - kz + a^{mh} = 0$$

482. $\cos x - \operatorname{tg} x = \text{minim?}$

Impossible. Car la dérivée égalée à zéro donne $-\sin x - \frac{1}{\cos^2 x} = 0$ ou $\sin x \cos^2 x = -1$ ce qui est impossible, puisque $\sin x$ et $\cos x$ sont < 1.

483. Lieu des points de division en moy. et extr. raison des cordes d'une parabole parallèles à une direction donnée. (4e degré). Voir 1550. — (2 paraboles)

484. Construire avec une parabole et un cercle les racines de l'Eq.

$$x^3 - 2A^3 = 0$$

485. Triangle maximum, de ceux qui ont un angle const. et $(a+b+c)$ aussi.

486. Par le foyer F d'une Ellipse, on mène AFB. on a $\frac{1}{FA} + \frac{1}{FB} =$ Const. (Coord. polaires; immédiat).

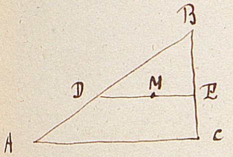
Et si A'FB' est perp. sur AFB, $\frac{1}{AB} + \frac{1}{A'B'} =$ Const.

487. Lieu des pôles des petits cercles d'une sphère ayant une corde commune.

488. Un cercle est mobile autour d'un point de sa circonférence. Lieu de ses points de contact avec une tangente de direction fixe.

489. On donne deux points, une droite fixe, un point sur cette droite; trouver le lieu des points d'où l'on peut mener par les deux points donnés deux droites telles que les segments qu'elles interceptent sur la droite fixe à partir du 3e. point soient égaux.

Hyperbole facile.



490. $\overline{DM}^2 + \overline{EM}^2 =$ Const. Lieu de M. (Ellipse, facile).

491. Lieu des intersections des tang. communes à une Ellipse et à un cercle qui roule dessus.

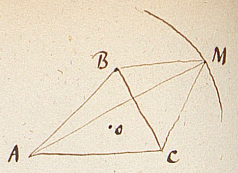
492. On donne deux droites rapportées à des axes qcq. on prend une même abscisse et les ordonnées correspondantes. Trouver le lieu des points tels que, pour la même abscisse, l'ordonnée soit moy. proport. entre celles des 2 droites.

493. Si, du centre O d'un cercle inscrit au

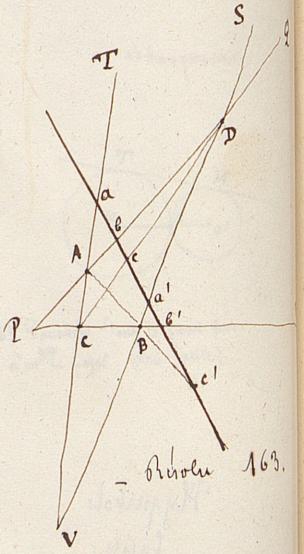
ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Triangle ABC, on décrit un cercle qcq. et si l'on joint un point M de ce cercle aux 3 sommets: la somme des carrés de ces droites, multipliés par les côtés opposés, est constante: c.à.d que

$$\overline{AM}^2 . BC + \overline{BM}^2 . AC + \overline{CM}^2 . AB = Const.$$



494. Soient deux droites PQ et PR, et deux autres VS et VT. Je joins AB et CD. Je mène une droite qcq. qui coupe le système aux points a, b, c, a', b', c'. Sur les segments aa', bb', cc' je décris 3 circonf. Elles se coupent en un même point.



— Révolu 163.

495. Lieu des milieux des cordes qui joignent les extrémités des diam. conj. d'une conique. (conique semblable).

496. Triangle max. inscrit dans une Ellipse.

497. On prend deux coniques: dans l'une, deux diam. conj., dans l'autre des Tg. parallèles à ces diam. Lieu de leurs points de rencontre.

498. Circonscrire à une Ellipse un Rectangle dont $S = k^2$. — Inscrire ....

499. Lieu des projections du centre de l'Ellipse sur les Tang. — sur les normales.

500. Lieu des foyers des hyperboles

$$xy = \frac{2}{9} y + C$$

501. Lieu des sommets des hyperb. ayant une asymptote et un foyer communs; — une as. et une directrice communes.

502. Inscrire dans une parabole une corde donnée passant par un point donné.

503. Lieu des projections d'un point de la parabole sur ses tang. — sur ses normales.

504. Lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole une seule — ou deux — ou trois normales.

505. Démontrer qu'une normale est toujours tang. à la courbe lieu des points d'où l'on peut mener deux normales.

506. Trouver la courbe telle que si l'on abaisse de deux points fixes des perp. sur les tangentes, la somme des carrés de ces perp. soit const.

507. Déterminer une conique, connaissant 3 points et une directrice, — et une axe.

508. Courbe du Réverbère.

509. On suppose que le centre du cercle circ. à un triangle, son centre de gravité, le centre du cercle inscrit et le point d'inters. des hauteurs sont en ligne droite. On donne leurs distances mutuelles. Calculer et construire les côtés. (Ecole Normale 1850).

510. Etant donnés une ellipse et une courbe qcq, on mène à celle-ci des tang. et, sur le diam. OC de l'ellipse conj. à la direction de la tang., on prend $OM.OD = \overline{OC}^2$. Lieu des points M.

Indiquer la marche à suivre dans le cas général. Appliquer la méthode au cas où l'Eq. de l'ellipse est $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ et celle de la courbe $x^2 = 9y$ (Conc. 1848). —

511. Etant donné un triangle circonscrit à un cercle, par les milieux de ses côtés on mène des tang. au cercle jusqu'à la rencontre en m, n, p des côtés opposés du triangle formé en joignant deux à deux ces milieux. Les 3 points m, n, p sont en ligne droite (Conc. 1847).

(N.° 165)

512. Une circ. coupe une courbe du second degré en 4 points. Les bissectrices des angles des cordes communes obtenues en joignant en croix les 4 points communs sont parallèles aux axes de la courbe.

513. D'un point pris dans le plan d'une courbe du second degré, on mène deux sécantes à cette courbe. On décrit deux autres courbes du second degré tangentes à la 1re. respectivement. aux points d'intersection des sécantes avec cette courbe. Démontrer que la corde commune à ces deux courbes passe par le point donné.

514. Lieu des milieux des cordes d'une conique, passant par un point.

515. Lieu des centres d'une ellipse roulant dans un angle droit.

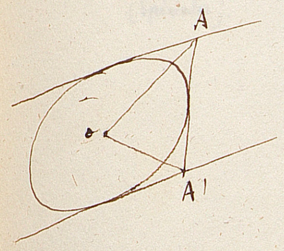
516. Deux billes étant placées sur un billard elliptique, en quel point de la bande faut-il frapper avec l'une pour aller rejoindre l'autre?

517. Lieu des sommets d'un angle constant dont un des côtés est tangent à une conique, et l'autre passe par un foyer; — d'un angle droit dont les côtés sont tang. à deux coniques concentriques et semblables.

518. On donne une conique et deux points. Par ces deux points on mène une conique tangente à la première. La corde de contact rencontre la droite qui joint les deux points en un point fixe.

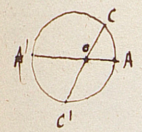
519. Lieu des points d'intersection des tangentes communes à une conique et à un cercle de rayon variable tang. à cette conique en un point fixe. (N. 635)

520. La somme des carrés des perp. abaissées des foyers imaginaires sur une tang. à l'ellipse est constante (on appelle F. Im. les points pris sur le petit axe à une distance c du centre).



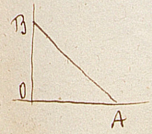
521. OA et OA' sont deux diamètres conjug.

522. Lieu des points tels que si, par un d'eux, on mène des tang. à l'ellipse, l'une des tang. est perp. à la corde de contact.



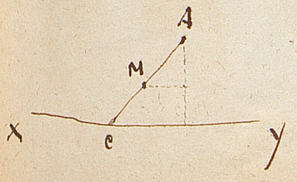
523. AA' et O fixes. $\operatorname{Tg} \frac{AC}{2} \operatorname{Tg} \frac{A'C'}{2} =$ Const.

524. Si l'on mène 3 tang. à une parabole, le cercle circonscrit au triangle qu'elles forment passe au foyer.



525. $\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} = K^2$. Enveloppe de AB.

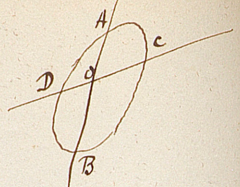
526. Lieu des centres des cercles tangents à une droite et interceptant sur une autre une corde de longueur donnée.



527. Lieu des points M qui divisent AC en moy. et extr. raison. (Droite parallèle à XY)

528. Lorsque deux droites se meuvent parall.lemt. à elles-mêmes dans le plan d'une conique,

$$\frac{OA.OB}{OC.OD} = K^2. \quad \text{(facile).}$$



529. Dans un triangle ABC trouver le lieu des points I d'où, en abaissant sur les 3 côtés des perp. dont on joint les pieds, le triangle formé ait une surface constante.

530. Lieu des centres des ellipses tangentes à deux droites en deux points donnés. — (facile. ~~Hyperbole~~. Droite — 641)

Algèbre Élémentaire.

---

531. Si m et n sont premiers entre eux, on a toujours $\sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{a^x}\,\sqrt[n]{a^y}$, x et y étant entiers.

532. Soient a et b deux nombres premiers entre eux. Tout nombre premier avec a est de la forme $ax+\alpha$, α étant premier avec a et plus petit que lui ; de même tout nombre premier avec b est de la forme $by+\beta$, β étant premier avec b et plus petit que lui. Cela posé, l'Éq. $ax+\alpha = by+\beta = z$ n'a qu'une solution plus petite que ab.

533. Les nombres compris dans la formule $2^x(2^{x+1}-1)$ sont des nombres parfaits, et, quand x est pair, si l'on fait la somme des chiffres, on obtient un multiple de $9,+1$: si l'on opère de même sur le nombre résultant, on trouve encore un multiple de $9,+1$.

534. Mener dans un triangle une parallèle à la base telle qu'elle engendre par sa révolution autour de la base du triangle une surface cylindrique qui divise le ~~surface~~ volume total engendré par le triangle en deux parties équivalentes. — La distance y à la base est $y = \frac{h}{2}\sqrt{2}$.

535. La cinquième puissance d'un nombre est terminée par le même chiffre que ce nombre.

536. Trouver une expression des nombres dont les puissances ont un, deux, trois ... chiffres à droite communs avec les racines.

537. Résoudre en nombres entiers $x^2 - 1 = 1000y$.

Remarquable (Spéciales). 538. Partager par un plan en deux parties égales le volume d'un hémisphère. (Résolu, 1543).

539. Étant donnés m points dans un plan, tels que 3 qcq. ne soient pas en ligne droite, on les joint deux à deux; trouver le nombre des points d'intersection de ces droites.

540. Étant donnés dans l'espace m points dont quatre quelconques ne sont pas dans un même plan, par ces points pris trois à trois on mène des plans, trouver le nombre des points d'intersection de ces plans trois à trois.

541. Si $p = abc$, a, b, c étant premiers absolus, et x premier avec p, faire voir que $x^{(a-1)(b-1)(c-1)} - 1$, est un multiple de p.

542. Exprimer $(x+y)(x+y-1)(x+y-2)\dots(x+y-n)$ en fonction de $x(x-1)(x-2)\dots(x-n+1)$ et de $y(y-1)(y-2)\dots(y-n+1)$.

543. Trouver la limite de $\sqrt[3]{x^3+x^2+1} - \sqrt[3]{x^3+1}$ pour $x = \infty$.

544. Soient a, b, c les 3 Racines de l'Equation $x^3+px+q=0$ on a

$$\frac{1}{3a^2+p}+\frac{1}{3b^2+p}+\frac{1}{3c^2+p}=0$$

545. Soient a, b, c, d ... les Racines de l'Eq. $f(x)=0$, on a

$$\frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+\frac{1}{f'(c)}+\frac{1}{f'(d)}+\cdots=0$$

546. Prouver que les Eq.

$$\begin{cases} aq^m+br^m = x(aq^{m-1}+br^{m-1})+y(aq^{m-2}+br^{m-2}) \\ aq^n+br^n = x(aq^{n-1}+br^{n-1})+y(aq^{n-2}+br^{n-2}) \end{cases}$$

ont pour Solutions

$$\begin{cases} x=q+r \\ y=-qr \end{cases}$$

Plus généralement.

$$\begin{cases} aq^m+br^m+cs^m = x(aq^{m-1}+br^{m-1}+cs^{m-1})+y(aq^{m-2}+br^{m-2}+cs^{m-2})+z(aq^{m-3}+\cdots) \\ aq^n+\cdots\cdots = x(aq^{n-1}+\cdots\cdots)+y(aq^{n-2}+\cdots\cdots)+z(aq^{n-3}+\cdots) \\ aq^p+\cdots = x(aq^{p-1}+\cdots\cdots)+y(aq^{p-2}+\cdots\cdots)+z(aq^{p-3}+\cdots) \end{cases}$$

ont pour Solutions

$$x=q+r+s \qquad y=-qr-qs-sr \qquad z=qrs$$

547. Démontrer que $\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1.2\ldots n}$ est entier.

548. Trouver la Somme

$$1.2.3+2.3.4+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2)$$

549. n exprimant combien il y a de nombres plus petits que N et premiers avec lui, on a

$$x^n-1=m.N$$

x étant premier avec N.

550. Tous les nombres plus petits que N et premiers avec lui peuvent se mettre sous la forme $y=\frac{1+xN}{a}$, a étant l'un de ces nombres.

551. Supposons que $\varphi(a)$ exprime combien il y a de nombres plus petits que a et premiers avec

lui ; si a et b sont premiers entre eux, on a

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\,\varphi(b).$$

552. on a

$$a + a' + a'' + \cdots < \sqrt{n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots)}$$

n étant le nombre des quantités a.

553. $\sqrt{(a^2+k)(b^2+k)}$ est irrationnel, pourvu que a et b soient différents.

554. La Racine $m^{ième}$ du produit de m nombres est plus petite que leur moyenne arithmétique.

555. Si n est divisible par 4, $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ est un multiple de n. Si le nombre n est simplement pair, $\left(\frac{n}{2}\right)^2$ est égal à un multiple de n, plus $\frac{n}{2}$.

556. Sommer $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n-1)x^n$

(Voir 432) (et 1474)

557. Soient α, β, γ .. les Racines de l'Eq.

$$x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1}x + A_m = 0$$

on a

$$S = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \cdots \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \cdots + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \cdots + \cdots\cdots = \frac{A_1 A_{m-1}}{A_m} - m$$

558. Deux nombres qui ont $2n$ chiffres dont les n derniers communs en ont $n-1$ communs à la Racine.

559. Résoudre
$$\begin{cases} a^x + b^y = c \\ a'^x + b'^y = c' \end{cases}$$

560. Si l'on range par ordre de grandeur les diviseurs de N, le produit de 2 termes équidistants des extrêmes $= N$. (Bertr. ar.)

561. on a $k^3 = (k-1)k(k+1) + k$

562. Démontrer que

$$S = 1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + \cdots$$

$$= (1 + A_1) \cdot \frac{1 + A_1 + A_2}{1 + A_1} \cdot \frac{1 + A_1 + A_2 + A_3}{1 + A_1 + A_2} \cdot \frac{1 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4}{1 + A_1 + A_2 + A_3} \cdots$$

et Réciproquement.

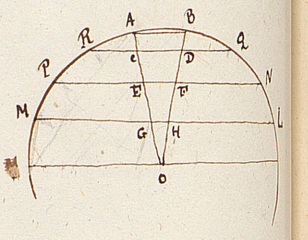
(Lebon Bos, difficile pour des Elémentaires). —

Géométrie Élémentaire.

563. – Deux polygones semblables, non situés dans un même plan, et ayant leurs côtés parallèles, peuvent être considérés comme les bases d'un tronc de pyramide à bases parallèles.

564. Les diagonales d'un trapèze se coupent sur la droite qui joint les milieux des côtés parallèles.

565. Si l'on partage en un nombre impair de parties égales une demi-circonférence, et si l'on mène les droites LM, NP, QR et les rayons OA, OB, la somme AB + CD + EF = OA.



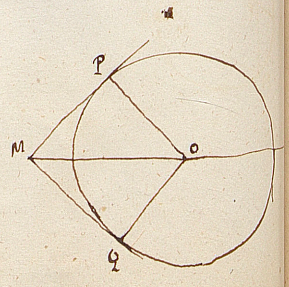
536. Le triangle équilatéral est le plus grand triangle inscrit dans une circ. donnée.

567. On donne une sphère et un cône circonscrit dont l'angle au sommet est droit. Mener un plan tel que les sections de la sphère et du cône soient dans un rapport donné.

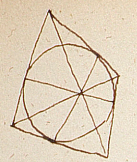
568. Décrire des sommets d'un triangle trois circonf. tang. deux à deux.

569. Volume d'une lentille sphérique.

570. Par les trois sommets d'un triangle on mène des parallèles à une direction qcq. et on les prolonge jusqu'à la rencontre des côtés opposés à ces sommets. Démontrer que le produit des deux parallèles extrêmes est égal à la somme des produits des mêmes parallèles par la première. (Conc. Gén. 1847). Résolu, n°. 49.

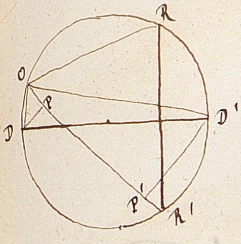


571. Trouver M : le rapport du volume engendré par le quadrilatère MPOQ tournant autour de MO, à celui de la sphère, devant être égal à $\frac{m}{n}$. – Cas où $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$. (facile) ($\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$, OM = 2r)



572. Dans un quadrilatère circonscrit les diagonales et les droites qui joignent les points de contact se coupent en un même point.

573. Diviser la surf. latérale d'un tronc de cône en deux parties égales par un plan parallèle aux bases.



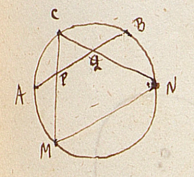
574. Si d'un point qcq. O d'une circonférence on mène des droites aux extrémités d'un diamètre DD' et d'une corde RR' rectangulaires, la somme des projections des deux premières sur l'une des deux autres est égale à la plus grande de celles-ci, et la différence de ces projections est égale à la plus petite: de sorte qu'on aura

$$OP + OP' = OR' \qquad OP' - OP = OR$$

575. La somme des distances d'un point du périmètre d'un parallélogramme aux deux diagonales est constante; — c'est leur différence, si le point est pris sur le prolongem.t d'un des côtés. (Supposé que ce soit un losange).

576. Lieu géom. des sommets des angles ayant pour mesure un arc sur lequel ils s'appuient.

577. Etant donné un triangle équilatéral, trouver le lieu des points tels que la distance à l'un des sommets soit égale à la somme des distances aux deux autres.



578. C est le milieu de AB. CM, CN arbitraires. MNPQ est inscriptible.

579. Lieu des points situés à une distance donnée d'un cercle.

580. Lieu des centres des circ. tg. à 2 circ. de même rayon (Discussion).

581. Lieu des centres des cercles tg. à 2 droites.

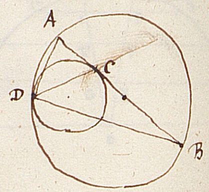
582. Dans un quadrilatère circonscrit, la somme des côtés opposés est la même ; — et Réciprt.

583. Les quatre cercles ex-inscrits à un quadrilatère ont leurs centres sur une même circonférence.

584. Les milieux d'un triangle et les milieux des portions des hauteurs comprises entre leur point de rencontre et les sommets, sont sur une même circonférence.

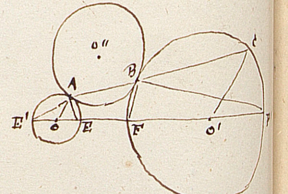
585. Si l'on joint les pieds des hauteurs d'un triangle, on en forme un second dont les angles ont pour bissectrices les hauteurs du premier.

586. Soient deux circonf. tg. intérieurement en D. Soit AB tg. à la petite. DC bissect ADB.



587. D'un point donné mener à un cercle une sécante telle que la corde interceptée = a.

588. OA et O'C sont parallèles.
Les quadrilatères ABFE, ABF'E' sont inscriptibles.

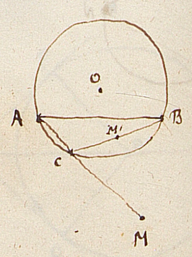


589. Lieu décrit par le milieu d'une droite a qui s'appuie sur les côtés d'un angle droit.

590. Lieu des points de contact de deux circ. données, de même rayon, assujetties à rester tangentes entre elles et à deux droites rectangulaires.

591. Lieu des milieux des cordes d'une circ. qui passent par un même point.

592. O, AB donnés. C qcq sur ACB. CM = CB, CM' = CA. Lieu de M ou de M'.



593. Lieu des centres ~~inscr~~ des cercles inscrits à des triangles ayant même base et même angle au sommet.

594. Les droites qui joignent les milieux des côtés opposés d'un quadrilatère et celles qui joint les milieux des diagonales se coupent en un même point.

595. Quand deux triangles ont un angle égal et deux angles supplémentaires, les deux côtés opposés à l'angle égal sont entre eux comme les côtés opposés aux angles supplémentaires.

596. Sur les côtés d'un triangle rectangle ABC on construit des triangles équilatéraux dont les sommets sont A', B', C', et l'on joint AA', BB', CC'. Ces droites se coupent en un même point I, et les angles AIB, BIC, CIA sont égaux.

597. Dans des triangles semblables, les médianes sont entre elles comme les côtés homologues.

598. Construire un triangle connaissant ses trois médianes.

599. Mener par un point une droite qui aille concourir au même point que deux droites qu'on ne peut prolonger.

600. Construire un triangle, connaissant la base, la différence des angles à la base, et la différence des autres côtés.

Divers.

601. Étant données n quantités $a_0\ a_1\ a_2 \dots a_{n-1}$ trouver la somme S de toutes les combinaisons 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, … n à n de ces quantités.

Cette somme est

$$S_n = 1+2+2^2+2^3+2^4+\dots+2^{n-1}$$

ainsi, pour 3 quantités, a, b, c, S est la somme le nombre des quantités :

a, b, c, ab, ac, bc, abc, c.a.d. 7 ou $1+2+4$.

Il est facile de voir en effet, que $S_{n+1} = 2S_n + 1$.

602. Nombres figurés, ou polygonaux.

Prenons la suite

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ \dots$$

Les nombres triangulaires successifs sont

$$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ 1+2+3+4,\ 1+2+3+4+5,\ \dots$$

ou $1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15,\ \dots$

Prenons la suite

$$1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13,\ \dots$$

Les nombres quadrangulaires sont

$$1,\ 1+3,\ 1+3+5,\ 1+3+5+7,\ 1+3+5+7+9,\ \dots$$

ou $1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ \dots$

Prenons la suite

$$1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\ 19,\ 22,\ 25,\ \dots$$

les nombres pentagonaux sont

$$1,\ 1+4,\ 1+4+7,\ 1+4+7+10,\ 1+4+7+10+13,\ \dots$$

ou $1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35,\ \dots$

etc.

603. Si x^2+2ay^2 est un carré, x^2+ay^2 est la somme de deux carrés.

Si $x^2+2ay^2 = z^2$, on aura $2x^2+2ay^2 = z^2+x^2$, d'où

$$x^2+ay^2 = \frac{z^2+x^2}{2}$$

$$= \left(\frac{z+x}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-x}{2}\right)^2$$

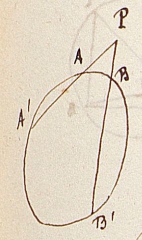
or l'Eq. $(z^2-x^2) = 2ay^2$ ou $(z-x)(z+x) = 2ay^2$ montre que z et x sont de même parité. Donc $\frac{z+x}{2}$ et $\frac{z-x}{2}$ sont de même parité entiers. Donc ....

De là encore ce théorème :

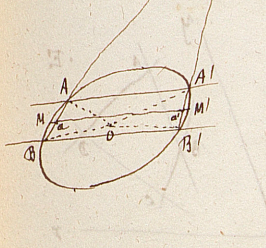
La demi-somme de deux carrés de même parité est la somme de deux autres carrés.

604. Soient deux tangentes parallèles à une hyperbole, en A et B. Soit une 3e tang. qcq. en M, rencontrant les deux autres en a et b. On a

Ma : Mb :: Aa : Bb.



605. AA' et BB' se mouvant parallèlement à elles-mêmes dans le plan d'une section conique, on a toujours $\frac{PA \cdot PA'}{PB \cdot PB'} = \text{Const.}$



606. Si l'on mène deux parallèles qcq. AA' et BB' coupant une section conique, et qu'on joigne les segmts AB, A'B', les segments AMB et A'M'B' sont équivalents.

(Car, MM' qcq. parallèle à AA', on a Ma = M'a'....)

607. Les secteurs AMBO, A'M'B'O sont aussi équivalents.

608. Sur l'asymptote OX d'une hyperbole, on prend A, B, A', B' tels que $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$. Par ces points, on mène des parallèles à l'autre asymptote, lesquelles rencontrent la courbe en a, b, a', b'. On joint

oa, ob, oa', ob' : les deux secteurs oab, oa'b' sont équivalents.

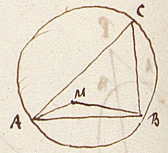
609. Soient A, A_1 deux points qcq. d'une hyperbole. Par ces points je mène deux parallèles qcq. APQ, $A_1P_1Q_1$ qui rencontrent les asymptotes respectivement en P, Q et P_1, Q_1. On a

$$AP \cdot AQ = A_1P_1 \cdot A_1Q_1$$

même théorème, si AP et A_1P_1 sont deux parallèles terminées à une asymptote, et AQ et A_1Q_1 deux autres parallèles qcq. terminées à l'autre asymptote.

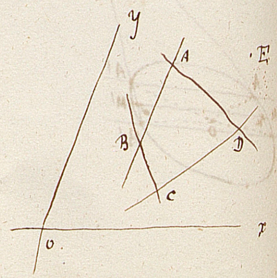
610. Soient AB, A'B' deux tangentes à une même branche d'hyperbole terminées aux asymptotes OAA' et OBB'. On a OA : OA' :: OB' : OB ou OA . OB = OA' . OB' = Const.

611. AB et l'angle C sont donnés. MA bissecte l'angle A ; $MBA = \frac{B}{4}$. Le lieu des points M est du 3e degré (Hermite).



612. Soit Xoy un angle, s l'arc décrit de son sommet comme centre avec un rayon R, et C la corde de cet arc. — $\lim \frac{C}{s} = 1$ pour $R = \infty$.

613. Conique passant par 5 points A, B, C, D, E. (Méthode Sturm).



Je les joins 2 à 2. — Eq. des 4 droites

$$\begin{cases} ay + bx + c = 0 & AB \\ a'y + b'y + c' = 0 & BC \\ a''y + b''x + c'' = 0 & CD \\ a'''y + b'''x + c''' = 0 & DA \end{cases}$$

L'Eq.

$(ay + bx + c)(a''y + b''x + c'')$ ou $A = 0$

est une conique passant par les 4 points.

De même $(a'y + b'x + c')(a'''y + b'''x + c''')$ ou $B = 0$.

donc $A + \lambda B = 0$

représente une conique quelconque passant par ces quatre points. — on détermine λ par la condition qu'elle passe en E:

$$A' + \lambda B' = 0$$

et λ n'est ni nul ni indéterminé s'il n'y a pas trois points en ligne droite.

614. On donne deux pyramides, l'une quadrangulaire, l'autre pentagonale, dont les arêtes croisées en projection peuvent donner lieu à une rencontre. On demande 1°. de construire la partie commune à ces deux pyramides, 2°. de développer la surface de l'une d'elles et de construire le développement de la figure de rencontre des deux surfaces.

615. Lieu des centres des hyperboles passant par deux points fixes et ayant des asymptotes de direction donnée.

Prenons l'Eq. générale du 2d. degré

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

et, pour axes, des parallèles aux asymptotes passant par les points donnés. Soient a et b les coord. de ces points dans ce système d'axes. Il faut que l'Eq. du 2d. degré ait une racine infinie et une égale à a pour $x = 0$, une racine infinie et une égale à b pour $y = 0$. Ce qui donne

$$(1) \begin{cases} A = 0 \\ Da + F = 0 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} C = 0 \\ Eb + F = 0 \end{cases}$$

Ce qui réduit l'Eq. générale à

$$Bxy + Dy + Ex + F = 0$$

Les coord. du centre s'obtiennent en égalant à zéro les dérivées, ce qui donne

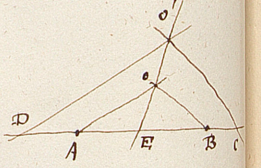
$$(3)\ Bx + D = 0 \qquad (4)\ By + E = 0$$

Entre les Eq. (1), (2), (3), (4) il faut éliminer B, D, E, F : ce qui conduit à

$$ay = bx$$

C'est l'Eq. du lieu cherché. On voit que c'est une droite passant par le milieu de celle qui joint les points donnés : car les coord. de ce point sont $\frac{a}{2}$ et $\frac{b}{2}$ qui satisfont à l'Eq. $ax = by$.

On peut trouver ce lieu par des considérations purement géométriques. — Soient A, B les deux points donnés, OA, OB deux parallèles aux asymptotes. Menons AB. Soit C un point de l'asymptote. L'asymptote entière sera O'C parallèle à OB. Pour avoir l'autre asymptote, il faut prendre AD = BC, et mener DO' parallèle à AO. On aura ainsi le centre O' d'une hyperbole passant par A et B, et ayant des asymptotes de direction donnée. On aura de plus



$$\frac{AE}{AD} = \frac{OE}{OO'} = \frac{EB}{BC} \; ; \text{ or } AD = BC, \text{ donc } AE = EB.$$

Le centre O' se trouve donc sur la droite passant par le point O et le milieu de AB. —

On peut, par une méthode analogue, décrire une hyperbole passant par 3 points donnés et ayant des asymptotes de direction donnée.

Soient A, B, C les trois points. Sur AB comme diagonale, je construis un parallélogramme dont les côtés soient parallèles aux directions données des asymptotes. De même sur AC comme diagonale. D'après ce qui précède, le centre sera à l'intersection des secondes diagonales de ces parallélogrammes. — Il sera également sur la seconde diagonale du parallélogr. construit sur BC. D'où ce théorème :

Les secondes diagonales des trois parallélogrammes dont les

côtés ont des directions fixes, et qui sont construits sur les trois côtés d'un triangle comme 1ères diagonales, se coupent en un même point.

Ce théorème peut se démontrer par la Géométrie pure.

616. Résoudre $\sin\frac{x}{2} = \cos\frac{2x}{3}$.

Cette Eq. s'écrit $\sin\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3}\right)$

or, pour que deux arcs a et b aient même Sinus, il faut

$$a+b = (2k+1)\pi \quad \text{ou} \quad a-b = 2k\pi$$

donc

$$\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{2x}{3} = (2k+1)\pi \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3(4k+1)\pi}{2}$$

ou

$$\frac{x}{2} + \frac{2x}{3} - \frac{\pi}{2} = 2k\pi \quad \text{d'où} \quad x = \frac{3(4k+1)\pi}{7}$$

On résoudrait de même l'Eq.

$$\operatorname{tg}(x^2+1) = -\operatorname{cotg}\frac{1}{x} \quad \text{par ex.}$$

617. Démontrer que dans la suite

$$\sqrt{2} \quad \sqrt[3]{3} \quad \sqrt[4]{4} \quad \dots \quad \sqrt[n]{n} \quad \sqrt[n+1]{n+1} \quad \dots$$

$\sqrt[3]{3}$ est le plus grand terme.

618. Soit S la surf. d'un triangle, h h' h'' ses trois hauteurs : on a

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h'}-\frac{1}{h''}\right)\left(\frac{1}{h}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h'}\right)\left(\frac{1}{h'}+\frac{1}{h''}-\frac{1}{h}\right)}.$$

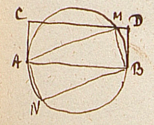
619. Si deux fractions irréductibles ont le même dénominateur et qu'on les réduise l'une et l'autre en décimales, les périodes auront le même nombre de chiffres.

620.

$$1 + x - x^3 - x^4 + x^6 + x^7 - x^9 - x^{10} + x^{12} + \dots = \frac{1}{1-x+x^2}$$

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^4 + \dots = \frac{1}{1-2x+x^2}$$

$$1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + \dots = \frac{1}{1-3x+x^2}$$



621. Inscrire dans un cercle un Rectangle équiv. de surface donnée. — Soit ABCD cette surf. AMBN est le Rect. demandé. (AMB = ½ ABCD). — Réduire delà quel

est le > rectangle inscrit.

622. Si l'on a

$$\sqrt[B]{A} > \sqrt[B']{A'} > \sqrt[B'']{A''} > \cdots > \sqrt[B_{n-1}]{A_{n-1}} > \sqrt[B_n]{A_n}$$

on a aussi

$$\sqrt[B]{A} > \sqrt[B+B'+\cdots]{AA'A''\cdots} > \sqrt[B_n]{A_n}$$

623. En ajoutant assez de fois un nombre qcq. à lui-même, on peut former un nombre divisible par un nombre premier avec 2 et 5, donné.

624. Surface S d'un triangle en fonction des trois médianes α, β, γ.

$$S = \frac{1}{3}\sqrt{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)(\alpha+\gamma-\beta)(\gamma+\beta-\alpha)}$$

Quel est le triangle maximum parmi ceux dont la somme des médianes est constante ? — C'est le triangle équilatéral. car les 3 derniers facteurs ont une somme constante, donc ....

625. Déterminer certaines fonctions par la condition qu'elles satisfassent à des conditions données.

1°. Déterminer $\varphi(x)$:

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Si je remplace y par y+z

$$\varphi(x+y+z) = \varphi(x) + \varphi(y+z)$$

$$= \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z)$$

de même

$$\varphi(x+y+z+u) = \varphi(x) + \varphi(y) + \varphi(z) + \varphi(u) \quad \text{etc.}$$

si $x = y = z = u = \cdots$ on a

$$\varphi(mx) = m\,\varphi(x)$$

et cela est vrai quel que soit x. Si $x = 1$ par exemple, $\varphi(m) = m\,\varphi(1) = am$, $a = \text{Const}$.

Donc en général $\varphi(x) = ax$

c'est ce qu'on peut vérifier, car $a(x+y) = ax + ay$.
Le calcul ne donnant d'ailleurs que cette forme d'Eq. on en conclut qu'il n'y a pas d'autre solution.

D'après la démonstration, m est nécessairement entier. Nous allons voir qu'on obtient la même fraction dans le cas où m est fractionnaire. — Reprenons l'Eq.

$$\varphi(m\alpha) = m\,\varphi(\alpha)$$

et posons $\beta = \frac{m}{n}\alpha$. on a donc

$$\varphi(n\beta) = m\,\varphi(\alpha)$$

D'ailleurs l'Eq. précédente étant vraie pour toute valeur de m et de β, l'est encore pour $m = n$, $\alpha = \beta$. Mais alors on a

$$\varphi(n\beta) = n\,\varphi(\beta)$$

Donc

$$m\,\varphi(\alpha) = n\,\varphi(\beta)$$

et, en remplaçant β par sa valeur,

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\alpha\right) = \frac{m}{n}\varphi(\alpha)$$

Si maintent. $\alpha = 1$, $\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = a.\frac{m}{n}$; — ou plus généralement $\varphi(\mu) = a\mu$, μ étant une quantité q.cq. même incommensurable, car on sait qu'on peut remplacer une irrationnelle par une fraction qui en diffère aussi peu que l'on veut.

2°.

$$\varphi(x+y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y)$$

Prenons les Log.

$$\text{Log}.\,\varphi(x+y) = \text{Log}.\,\varphi(x) + \text{Log}.\,\varphi(y)$$

Donc

$$\text{Log}.\,\varphi(x) = ax$$

$$\varphi(x) = A^x$$

3°.

$$\varphi(xy) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

Si je remplace x par $A^{\text{Log}\,x}$, il vient

$$\varphi\left(A^{\text{Log}\,x+\text{Log}\,y}\right) = \varphi\left(A^{\text{Log}\,x}\right) + \varphi\left(A^{\text{Log}\,y}\right)$$

d'après la formule (1), on a donc

$$\varphi\left(A^{\text{Log}\,x}\right) = a\,\text{Log}\,x = \varphi(x)$$

La fonction qui satisfait l'Eq. proposée est donc, $a\,\text{Log}\,x$ et en effet

$$a\,\text{Log}(xy) = a\,\text{Log}\,x + a\,\text{Log}\,y$$

4°.

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\cdot\varphi(y).$$

Je prends les Logarithmes :

$$\text{Log}\,\varphi(xy) = \text{Log}\,\varphi(x) + \text{Log}\,\varphi(y)$$

donc (3°)

$$\varphi(x) = a\,\text{Log}\,x = \text{Log}\,x^a$$

d'après cela

$$\varphi(x) = x^\alpha.$$

626. Théorème de Fermat. – Tous les coefficients du développement du Binôme $(x+a)^p$ sont entiers, et si l'on suppose p premier absolu, comme tous les facteurs des dénominateurs sont $< p$, tous ces coefficients sont divisibles par p, sauf le premier et le dernier. On aura donc, en faisant $x=1$ Voir 710.

$$(a+1)^p = a^p + M\,p + 1 \quad \text{ou} \quad (a+1)^p - a^p - 1 = M.p$$

ce qui peut s'écrire

$$(a+1)^p - (a+1) - (a^p - a) = M.p$$

$$(a+1)\left\{(a+1)^{p-1} - 1\right\} - a\left\{a^{p-1} - 1\right\} = M.p$$

Donc, si $a^{p-1} - 1$ est un multiple de p, $(a+1)^{p-1} - 1$ est aussi un multiple de p. Or il est évident que $1^{p-1} - 1 = M.p = 0$. Donc $2^{p-1} - 1 = M.p$, $3^{p-1} - 1 = M.p$,

et en général $a^{p-1} - 1 = M.\,p$ c.q.f.d.

627. Trouver l'Éq. du second degré dont une des racines est

$$\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{\cdots}}}}}}$$

Soit x la valeur de cette expression : le nombre des radicaux superposés étant infini, un de plus ou de moins ne fait rien, et par conséquent

$$x^2 = a + x \quad \text{d'où} \quad x^2 - x - a = 0$$

Pour expliquer la racine négative, je change x en $-x$ dans cette Éq. Il vient

$$x^2 + x - a = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = a - x$$

d'où enfin

$$x = \sqrt{a - x} = \sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{a-\sqrt{\cdots}}}}$$

En général, les deux racines de l'Éq.

$$x^2 - mx - n = 0$$

peuvent s'écrire

$$x = \sqrt{n + mx} = \sqrt{n+m\sqrt{n+m\sqrt{n+m\sqrt{n+\cdots}}}}$$

on verrait en changeant x en $-x$ que la racine négative se met sous la forme

$$x = \sqrt{n-m\sqrt{n-m\sqrt{n-\cdots}}}$$

N. 1538. 628. $\frac{1}{1.2\ldots m} + \frac{1}{1.1.2\ldots(m-1)} + \frac{1}{1.2.1.2\ldots(m-2)} + \cdots + \frac{1}{1.2\ldots m} = \frac{2^m}{1.2\ldots m}$

629. De combien de manières peut-on recouvrir une sphère avec des polygones sphériques réguliers et égaux ?

630. L'expression

$$S = \frac{a^m}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^m}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^m}{(c-a)(c-b)}$$

est entière.

Supposons $a > b > c$. on pourra écrire

$$S = \frac{a^m}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^m}{(a-b)(b-c)} + \frac{c^m}{(a-c)(b-c)} = \frac{ab(a^{m-1}-b^{m-1})-c(a^m-b^m)+c^m(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Le numérateur est divisible par $a-b$. — on démontrera de même qu'il l'est par $a-c$ et $b-c$.

631. Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que les trois côtés d'un triangle rectangle soient exprimés en nombres commensurables et entiers?

on aura

$$x^2 + y^2 = z^2$$

or si l'on pose

$$z = a^2+b^2 \qquad y = 2ab \qquad x = a^2-b^2$$

l'Eq. sera satisfaite pour des valeurs qcq. de a et de b. Car

$$(a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 = (a^2+b^2)^2$$

Ces valeurs sont donc suffisantes. Je dis qu'elles sont nécessaires. En effet on a

$$(z-x)(z+x) = y^2$$

or, pour que le 1er membre soit un carré parfait, il faut et il suffit que l'on ait

$$z-x = pq^2 \qquad z+x = pt^2$$

Car alors $(z-x)(z+x) = p^2t^2q^2$. — De ces Eq. on tire

$$z = p\,\frac{(q^2+t^2)}{2} \qquad x = p\,\frac{(t^2-q^2)}{2} \qquad y = pqt$$

D'ailleurs tous les triangles rectangles semblables à celui que l'on considère donneront des valeurs proportionnelles. On peut donc prendre, pour le plus petit,

$$z = \frac{q^2+t^2}{2} \qquad x = \frac{t^2-q^2}{2} \qquad y = qt$$

D'ailleurs, les côtés devant être commensurables et entiers, il faut que q et t soient tous deux pairs ou tous deux impairs. — S'ils sont tous deux pairs, posons

$$q = 2M \qquad t = 2N$$

Or a

$$z = 2M^2 + 2N^2 = (M+N)^2 + (M-N)^2$$

$$y = 4MN = (M+N)^2 - (M-N)^2$$

$$x = 2M^2 - 2N^2 = 2(M+N)(M-N)$$

S'ils sont tous deux impairs, posons

$$q = 2M+1 \qquad t = 2N+1$$

on aura

$$z = (M+N+1)^2 + (M-N)^2$$

$$y = (M+N+1)^2 - (M-N)^2$$

$$z = 2(M+N+1)(M-N).$$

Donc .... c.q.f.d.

632. Sur les polygones réguliers inscrits.

Soit a le côté d'un polygone régulier inscrit dans un cercle, $b, c, d, ..$ les côtés de polygones réguliers inscrits dont le nombre de côtés va toujours en doublant. – on a entre ces côtés les relations

$$a = \frac{b}{R}\sqrt{4R^2 - b^2}$$

$$b = \frac{c}{R}\sqrt{4R^2 - c^2}$$

$$c = \frac{d}{R}\sqrt{4R^2 - d^2}$$

etc.

Pour fixer les idées, considérons le côté c et le côté a. L'arc sous-tendu par le côté a est quadruple de l'arc sous-tendu par le côté c. Si l'on suppose que ces côtés soient disposés parallèlement, et qu'on les fasse mouvoir parallèlemt. à eux-mêmes, de manière que les arcs sous-tendus (et placés de côtés opposés) aient toujours le même rapport, quand ils coïncideront, ils formeront le côté du pentagone. Pour les faire coïncider, il suffit d'exprimer qu'ils sont égaux. – En exprimant

que $a=b$, on a le côté du triangle équilatéral. En exprimant que $a=c$, le côté du pentagone ; et en général, en exprimant que a est égal au côté de l'ordre n, on aura le côté du polygône régulier de 2^n+1 côtés.

applications. 1°. triangle équilatéral. $a=b=\frac{b}{R}\sqrt{4R^2-b^2}$ d'où

$$b=R\sqrt{3}$$

2°. $a=c=\frac{b}{R}\sqrt{4R^2-b^2}$ et, en remplaçant b par $\frac{c}{R}\sqrt{4R^2-c^2}$,

$$c=\frac{c}{R^2}\sqrt{4R^2-c^2}\sqrt{4R^2-4c^2+\frac{c^4}{R^2}}$$

$$R^4=(4R^2-c^2)\left(4R^2-4c^2+\frac{c^4}{R^2}\right)$$

et en posant $c^2=x$, puis effectuant et réduisant,

$$x^3-9R^2x^2+20R^4x-15R^6=0$$

or, en exprimant que $a=c$, on a exprimé implicitement que $a=b$, on doit donc trouver le côté du triangle équilatéral. $x=3R^2$ doit donc être une racine de l'Eq. précédente, et par suite cette Eq. admet le facteur $x-3R^2$. En le supprimant, il reste

$$x^2-5R^2x+5R^4=0$$

d'où

$$x=R^2\cdot\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$c=R\sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}}$$

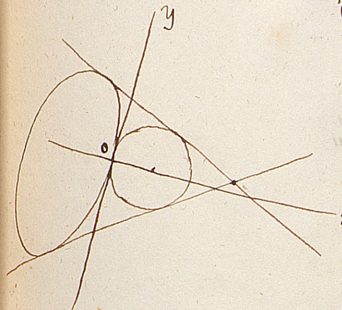
Ces valeurs sont celles des 2 côtés des deux pentagones réguliers inscrits obtenus l'un en joignant les points de la circonf. de 1 en 1 ou de 4 en 4, et l'autre en joignant de 2 en 2 ou de 3 en 3.

En cherchant le côté du polygone de 9 côtés qu'on obtient en posant $a=d$, on trouve les côtés des polygones inférieurs de 3 et de 5 côtés, ce qui complique l'Eq. Mais on peut les en séparer par division, puisqu'on les connaît déjà.

633. On donne une conique et deux points. Par ces deux points on mène une conique tangente à la première en deux points. La corde de contact rencontre en un point fixe la droite qui joint les deux points donnés.

634. Trouver l'Eq. de la Cissoïde, connaissant son mode de génération, et sachant de plus que son Eq. est du 3e. degré entière et rationnelle par rapport aux variables.

635. Lieu des intersections des tangentes communes à une conique et à un cercle tangt. à cette conique: le point de contact des deux courbes est fixe, et le rayon du cercle est variable.



Je prends pour axes la tang. commune et la normale. Eq. de la conique se réduit à

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Ex = 0$$

Eq. du cercle

$$y^2 + x^2 - 2Rx = 0$$

Je prends une droite qcq.

$$y = mx + p$$

et je cherche son intersect. avec la conique : les abscisses des intersect. sont

$$(Am^2 + Bm + C)x^2 + (2Amp + Bp + E)x + Ap^2 = 0$$

La droite étant tangente :

$$(2Amp + Bp + E)^2 = 4Ap^2(Am^2 + Bm + C)$$

d'où

$$m = -\frac{(B^2 - 4AC)p^2 + 2BEp + E^2}{4AEp}$$

(pourquoi une seule valeur de m ? – c'est que o la tang. est déterminée par p, et que oy est tg.) Donc l'Eq. de la tangente à la con. correspond. à l'ordonnée à l'origine p est

$$y = -\frac{(B^2-4AC)p^2+2BEp+E^2}{4AEp}x+p$$

Pour exprimer qu'elle est tg. au cercle, j'observe que l'Eq. de celui-ci se réduit de celle de la conique en faisant $A=C=1$ $B=0$ $E=-2R$. L'Eq. de la tang. devient ainsi

$$y = -\frac{p^2-R^2}{2pR}x+p$$

Ces deux tang. se confondent pour une même valeur qcq. de p. Donc les coeff. de p sont prop.

$$\frac{x-2R}{(B^2-4AC)x-4AE} = \frac{Ry}{E(2Ay+Bx)} = -\frac{R^2}{E}$$

Eliminant R, j'ai l'eq. du lieu

$$(2Ay+Bx)^2+(B^2-4AC)y^2+2BEy=0$$

Ellipse, hyp. ou parab. suivant que la con. donnée est une hyp. ell. ou parab. — Contraire.

636. — Soient $a, b, c, \ldots k$ les n Racines d'une Eq. $f(x)=0$. on a

$$P_0 = \frac{1}{f'(a)}+\frac{1}{f'(b)}+---+\frac{1}{f'(k)}=0$$

$$P_1 = \frac{a}{f(a)}+\frac{b}{f'(b)}+---+\frac{k}{f'(k)}=0$$

$$P_2 = \frac{a^2}{f'(a)}+\frac{b^2}{f'(b)}+---+\frac{k^2}{f'(k)}=0$$

$$P_{n-1} = \frac{a^{n-1}}{f'(a)}+\frac{b^{n-1}}{f'(b)}+---+\frac{k^{n-1}}{f'(k)}=1$$

Je décompose $\frac{x}{f(x)}$ en fractions simples. J'ai

$$\frac{x}{f(x)} = \frac{a}{(x-a)f'(a)}+\frac{b}{(x-b)f'(b)}+---+\frac{k}{(x-k)f'(k)}$$

Cette Eq. est une identité qui doit être vraie

pour toutes les valeurs de x. on peut la mettre sous la forme

$$x = \frac{a}{f'(a)}\frac{f(x)}{(x-a)} + \frac{b}{f'(b)}\frac{f(x)}{(x-b)} + \cdots + \frac{k}{f'(k)}\frac{f(x)}{x-k}$$

Si je fais $x=0$, le premier membre se réduit à zéro. $x-a$, $x-b$, .. $x-k$ deviennent $-a$, $-b$, .. $-k$, $f(0)$ une constante : donc

$$P_0 = \frac{1}{f'(a)} + \frac{1}{f'(b)} + \text{———} + \frac{1}{f'(k)} = 0$$

Cela posé,

si $f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \cdots + A_m = 0$

on a

$$\frac{f(x)}{x-a} = x^{m-1} + \left.\begin{matrix} a \\ + A_1\end{matrix}\right| x^{m-2} + \left.\begin{matrix} a^2 \\ + A_1 a \\ + A_2\end{matrix}\right| x^{m-3} + \cdots + \begin{matrix} a^{m-1} \\ + A_1 a^{m-2} \\ + A_2 a^{m-3} \\ + \cdots \\ + A_{m-1}\end{matrix}$$

avec la condition

$$a^m + A_1 a^{m-1} + \text{——} + A_m = 0$$

qui exprime que a est racine.

on aurait de même les valeurs de $\frac{f(x)}{x-b}$, ... $\frac{f(x)}{x-k}$,

et, en substituant dans l'identité ci-dessus, on a celle-ci

$$x = P_1 x^{m-1} + (P_2 + A_1 P_1) x^{m-2} + (P_3 + A_1 P_2 + A_2 P_1) x^{m-3} + \cdots$$
$$+ (P_{m-1} + A_1 P_{m-2} + A_2 P_{m-3} + \cdots + A_{m-2} P_1) x + \cdots$$

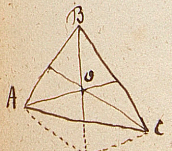
pour que cette égalité soit identique, il faut évidem^t. que

$$P_1 = 0 \quad P_2 + A_1 P_1 = 0 \quad \ldots \quad P_{m-1} + \cdots + A_{m-2} P_1 = 1$$

donc $\quad P_1 = P_2 = \cdots = P_{m-2} = 0 \quad P_{m-1} = 1$

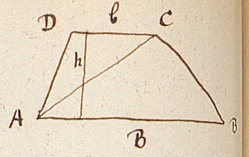
c.q.f.d.

637. Trois forces représentées par les droites qui joignent le centre de gravité d'un triangle aux sommets se font équilibre.



se démontre par cette fig.

638. Centre de gravité du trapèze.



x et y les distances du centre de gravité à chacune des bases. Les triangles ABC, ADC ayant même hauteur, on peut prendre pour mesures relatives des surfaces les bases B et b : alors la surf. du trapèze sera B+b. Si l'on prend les moments par rapport à AB, on a

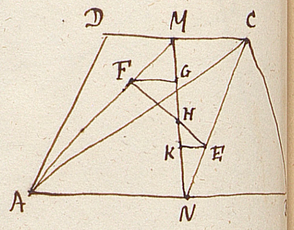
$$(B+b)x = B\frac{h}{3} + b\frac{2h}{3}$$

car le centre de gravité de ABC est à une hauteur égale à $\frac{h}{3}$ de la base AB, et celui de DAC à une hauteur $\frac{2h}{3}$. — En prenant les moments par rapport à DC, on a

$$(B+b)y = b\frac{h}{3} + B\frac{2h}{3}$$

d'où

$$\frac{x}{y} = \frac{B+2b}{b+2B}$$



autre méthode. Je mène la médiane MN. Le centre de gravité de ADC est F, celui de CAB est E. Celui du trapèze est sur EF ; et aussi sur MN, donc en H. — d'où la formule. Car les forces appliquées en E et F sont prop. à B et b, H est le point d'application de leur résultante. Donc

$$EH : FH :: b : B :: KH : GH$$

or MF est $= \frac{AM}{3}$. donc $MG = \frac{MN}{3}$; donc de même aussi $NK = \frac{MN}{3}$. donc il faut aussi que KG soit le 3e. tiers. — La proportion précédente donne

$$\frac{KH}{GH} = \frac{b}{B} \quad \text{d'où} \quad \frac{2KH+GH}{GH} = \frac{2b+B}{B} = \frac{x}{GH}$$

De même $\frac{2B+b}{B} = \frac{y}{GH}$

d'où $\frac{x}{y}$.

La première méthode s'applique très bien à la recherche du centre de gravité d'un tronc de pyramide.

639. Sommes

$$\begin{cases} \cos h + \cos(a+h) + \cos(2a+h) + \cdots + \cos(ma+h) \\ \sin h + \sin(a+h) + \sin(2a+h) + \cdots + \sin(ma+h) \end{cases}$$

$$\begin{cases} S = \sin a \sin b + \sin 2a \sin 2b + \cdots + \sin na \sin nb \\ S' = \cos a \cos b + \cos 2a \cos 2b + \cdots + \cos na \cos nb \end{cases}$$

on cherche $S + S'$ et $S - S'$.

De même on trouve $\sin a \cos b + \sin 2a \cos 2b + \cdots$

en même temps que $\cos a \sin b + \cos 2a \sin 2b + \cdots$

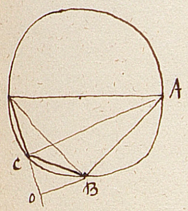
640. Si $a + b + c = \pi$, on a

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c = 1$$

$$\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b + \operatorname{tg} c = \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$$

641. Trouver une circonférence telle qu'en portant, à partir de l'un de ses points, trois cordes données à la suite l'une de l'autre et dans un sens qcq. on retombe au point diamétralement opposé.



Soient a, b, c les cordes données AB, BC, CD.

Soit $x = AD$ le diamètre cherché. Menons BD, AC. Le triangle rectangle ABD donne

$$BD = \sqrt{x^2 - a^2}$$

BO perp. à DC. L'angle BAD a pour supplém^t. BCD, donc il est égal à BCO. Les triangles rectangles ABD, BCO donnent donc

$$OC = \frac{ab}{x}$$

D'ailleurs le triangle BCD donne

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 + 2 DC . OC$$

ou bien $$x^2 - a^2 = b^2 + c^2 + 2c\frac{ab}{x}$$

$$x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$$

2ᵉ. Solution. — Les mêmes triangles semblables donnent

$$OB : BD :: b : x$$

d'ailleurs
$$\overline{BD}^2 = x^2 - a^2$$
$$\overline{OB}^2 = \overline{BD}^2 - \left(c + \frac{ab}{x}\right)^2$$

donc
$$OB = \sqrt{x^2 - a^2 - \left(c + \frac{ab}{x}\right)^2}$$

Substituant dans la proportion, élevant au carré et réduisant, on a
$$x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$$

3ᵉ. Solution. — On sait que dans un quadrilatère inscriptible le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. Donc

$$BD . AC = AB . CD + BC . AD$$

ou
$$\sqrt{x^2-a^2}\,\sqrt{x^2-c^2} = ac + bx$$

d'où
$$x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$$

4ᵉ. Solution. — Le triangle ABD a pour mesure

$$BD . AB = \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2}$$

et le triangle BCD

$$CD . BO = c . \frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{2x}$$

car les triangles semblables BDO, ACD donnent $BO = \frac{c\sqrt{x^2-a^2}}{x}$

on a de même $ACD = \frac{c\sqrt{x^2-c^2}}{2}$, $ABC = \frac{ab\sqrt{x^2-c^2}}{2x}$

donc
$$\left(a + \frac{bc}{2x}\right)\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2} = \left(c + \frac{ab}{2x}\right)\frac{\sqrt{x^2-c^2}}{2}$$

d'où
$$x^3 - (a^2+b^2+c^2)x - 2abc = 0$$

5ᵉ. Solution, plus élégante. — Soit x le rayon de la circ. cherchée, et $2a$, $2b$, $2c$ les cordes données, ainsi rangées par ordre de grandeur, 2α, 2β, 2γ les angles au centre correspondants, positifs ou négatifs selon

que les cordes sont portées dans l'un ou l'autre sens.
on a

$$a = \pm x \sin\alpha \quad b = \pm x \sin\beta \quad c = \pm x \sin\gamma$$

d'ailleurs

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad a < x < a+b+c$$

Cette Eq. donne

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma + 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = 1$$

et, en substituant,

$$\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{x^2} + \frac{c^2}{x^2} \pm \frac{2abc}{x^3} = 1$$

$$x^3 - (a^2+b^2+c^2)x \mp 2abc = 0$$

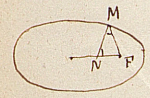
Cette Eq. a une racine positive comprise entre a et $(a+b+c)$, une entre $-a$ et $-(a+b+c)$, et une entre 0 et $-c$, mais cette dernière ne convient pas.

642. Lieu des centres des Ellipses tangentes aux deux côtés d'un angle en deux points A et B.

C'est une droite passant par le sommet de l'angle et par le milieu de AB.

643. Le lieu des points d'où l'on peut mener à une Ellipse des normales perp. entre elles, est un cercle. (Cela doit être faux). (En effet, voir 350).

644. Dans l'ellipse, la Normale fait avec le Rayon vecteur au point de contact et avec le Grand axe des angles dont les Sinus ont un Rapport constant et égal à $\frac{a}{c}$.



Car le triangle FMN donne

$$\sin N : \sin M :: a - \frac{cx'}{a} : c - \frac{c^2x'}{a^2}$$

d'où

$$\frac{\sin N}{\sin M} = \frac{a - \frac{cx'}{a}}{\frac{c}{a}\left(a - \frac{cx'}{a}\right)} = \frac{a}{c}.$$

cqfd.

645. Sur la Recherche des Limites.

Quand x tend vers l'infini, on a

$$\frac{f(x)}{x} = f(x+1) - f(x)$$

En effet, quand x reçoit des valeurs très-grandes, on a

$$\frac{f(x+1)}{x+1} = \frac{f(x)}{x}$$

or, quand deux fractions sont égales, en les retranchant terme à terme, on obtient une fraction égale, donc

$$\frac{f(x)}{x} = f(x+1) - f(x) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

application. Cherchons $\text{Lim} \sqrt[x]{x}$ ou $x^{\frac{1}{x}}$.

on a $$\mathcal{L}\, x^{\frac{1}{x}} = \frac{\mathcal{L}x}{x} = \mathcal{L}(x+1) - \mathcal{L}x = \mathcal{L}\frac{x+1}{x}$$

donc, à la Limite, $x^{\frac{1}{x}} = \frac{x+1}{x}$, $\text{Lim.} = 1$.

$\frac{\text{Log}\, x}{x}$ tend vers 0 quand x croît indéfiniment. En effet, $x^{\frac{1}{x}}$ ayant pour limite 1, son logarithme $\frac{\text{Log}\, x}{x}$ tendra vers 0.

$(1.2.3\ldots x)^{\frac{1}{x}}$ tend vers l'infini. En effet

$$\text{Log}\,(1.2.3\ldots x)^{\frac{1}{x}} = \frac{\mathcal{L}(1.2\ldots x)}{x} = \mathcal{L}(1.2.3\ldots x+1) - \mathcal{L}(1\ldots x)$$

$$= \mathcal{L}(1.2\ldots x) + \mathcal{L}(x+1) - \mathcal{L}(1\ldots x) = \mathcal{L}(x+1)$$

donc, $$\text{Lim.}\,(1.2\ldots x)^{\frac{1}{x}} = \text{Lim}\,(x+1) = \infty.$$

Si $a > 1$, $\frac{a^x}{x}$ tend vers ∞. En effet, par la formule ci-dessus, on a à la Limite

$$\frac{a^x}{x} = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$$

or $a-1$ est fixe et >0 : a^x tend vers l'infini : donc aussi $\frac{a^x}{x}$.

Lorsque x augmente indéfiniment, on a aussi :

$$f(x)^{\frac{1}{x}} = \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

En effet, on a

$$Log.\ f(x)^{\frac{1}{x}} = \frac{L\,f(x)}{x} = L\,f(x+1) - L\,f(x) = L\,\frac{f(x+1)}{f(x)}$$

donc

$$Lim\ f(x)^{\frac{1}{x}} = Lim.\ \frac{f(x+1)}{f(x)}$$

Faisons $f(x) = 1.2.3\ldots x$: il vient, si x augm^te. indéfiniment

$$(1.2.3\ldots x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1.2.3\ldots(x+1)}{1.2\ldots x} = x+1$$

donc ....

646. Démontrer l'Identité

$$2^n(2n-1)(2n-3)(2n-5)\ldots 5.3.1 = 2n(2n-1)(2n-2)\ldots(n+1)$$

---

647. Détermination du Rapport de la circonfé-rence au diamètre. –

on a établi que deux circ. sont entre elles comme leurs rayons. on a donc

$$\frac{Circ.\ R}{R} = Const.$$

on a établi que deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs rayons. on a donc

$$\frac{Cercle\ R}{R^2} = Const.$$

on a démontré que $Cercle\ R = (Circ.\ R.)\frac{R}{2}$, donc

$$\frac{Cercle\ R}{R^2} = \frac{Circ\ R\ .\ \frac{R}{2}}{2R\ .\ \frac{R}{2}} = \pi.$$

on peut donc prendre

$$\pi = \frac{Circ\ R}{2R} \quad ou \quad \pi = \frac{Cercle\ R}{R^2}$$

de là 2 méthodes pour déterminer π.

1ère Méthode. – On peut se donner la longueur de la circonférence et chercher la longueur du rayon. Pour cela on prend une suite de polygones réguliers isopérimètres dont le périmètre commun est la longueur même de la circonférence, et dont le nombre des côtés est une puissance de 2, parce qu'alors des formules simples permettent de déduire le rayon et l'apothème du polyg. régulier du nombre de côtés $2n$ de ceux du polyg. du nombre de côtés n. – Quand on est arrivé à un polygone dont le rayon et l'apothème diffèrent d'une quantité plus petite qu'une quantité donnée, il est clair que l'on a à fortiori avec cette approximation le rayon de la circ. qui a même longueur. – En prenant un choix convenable d'unité, l'approximation avec laquelle on obtient π est plus facile à déterminer. On prend la longueur de la circonférence, ou, ce qui revient au même, le périmètre commun des polygones égal à 2 unités linéaires. alors la formule précédente devient

$$\frac{1}{\pi} = \frac{R}{\left(\frac{\text{Circ } R}{2}\right)} = R$$

Le nombre qui exprime $\frac{1}{\pi}$ est donc égal au nombre qui exprime le rayon.

Soient $R_4 \quad R_8 \quad R_{16} \quad R_{32} \ldots$

$r_4 \quad r_8 \quad r_{16} \quad r_{32} \ldots$

les rayons et les apothèmes des polygones réguliers isopérimètres d'un nombre de côtés toujours double; R, et par suite $\frac{1}{\pi}$, est toujours compris entre ces nombres. – Je dis maintenant que si l'on veut avoir π avec n décimales, il faut calcu-

les $\frac{1}{\pi}$ avec $n+1$ décimales exactes. En effet on a

$$\frac{1}{\pi} = 0,318309886\ldots$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 0,10131489\ldots$$

Si $\frac{1}{\pi}$ est calculé avec n décimales, on a

$$\frac{a}{10^n} < \frac{1}{\pi} < \frac{a+1}{10^n}$$

Ici

$$a = 318309886$$

$$a+1 = 318309887$$

De ce qui précède on déduit

$$\frac{10^n}{a} > \pi > \frac{10^n}{a+1}$$

La différence entre les deux quantités extrêmes est

$$\frac{10^n}{a(a+1)} \quad \text{ou} \quad \frac{10^n}{a^2+a}$$

or, d'après les valeurs de a^2 et de a qui précèdent, on peut voir que si a contient n chiffres, a^2 en aura $2n$. Donc

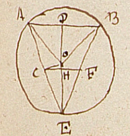
$$a > 10^{n-1} \qquad a^2 > 10^{2n-1}$$

et par suite $\quad a^2+a > 10^{2n-1} \quad$ et $\quad \frac{10^n}{a(a+1)} < \frac{10^n}{10^{2n-1}}$ ou $\frac{1}{10^{n-1}}$.

Si donc les deux nombres qui comprennent $\frac{1}{\pi}$ ont n décimales communes, π en aura $n-1$ exactes.

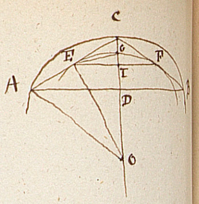
Il s'agit maintenant de calculer le rayon et l'apothème d'un polygone régulier connaissant le rayon et l'apothème d'un polyg. régulier isopérimètre d'un nombre de côtés moitié moindre. Pour cela, nous avons deux méthodes.

La première est celle de Blanchet, elle est connue. Elle donne



$$r' = \frac{R+r}{2} \qquad R' = \sqrt{R.r'} = \sqrt{R.\frac{R+r}{2}}$$

Voici l'autre méthode. — Soit AB le côté du polygone régulier inscrit, OA en est le rayon et OD l'apothème. Prolongeons OD jusqu'à la circ. qu'elle rencontre au point C; joignons AC, BC et par le point E, milieu de AC, menons EF parallèle à AB. EF est le côté cherché. On a



$$CI = ID \quad \text{et par conséq}^t. \quad ID = \frac{OC - OD}{2}$$

donc

$$OD + ID = OD + \frac{OC - OD}{2} = \frac{OC + OD}{2}$$

ou bien

$$r' = \frac{R + r}{2}$$

Le triangle rectangle OEC donne

$$\overline{OE}^2 = OC \cdot OI$$

ou bien

$$R' = \sqrt{R \cdot r'} = \sqrt{R \cdot \frac{R+r}{2}}$$

Sur l'une et l'autre figure on peut vérifier que $R > R'$ et $r < r'$: les formules le montrent également. On conclut de là que la différence entre le rayon et l'apothème va toujours en diminuant. — Je vais démontrer de plus que chaque différence est moindre que le quart de la différence précédente. — En effet

$$R' - r' = \sqrt{R \frac{R+r}{2}} - \frac{R+r}{2} = \sqrt{\frac{R+r}{2}} \left\{ \sqrt{R} - \sqrt{\frac{R+r}{2}} \right\}$$

$$R' - r' = \sqrt{\frac{R+r}{2}} \; \frac{\frac{R-r}{2}}{\sqrt{R} + \sqrt{\frac{R+r}{2}}}$$

or $\frac{R+r}{2} < R$. donc $\sqrt{\frac{R+r}{2}} < \sqrt{R}$ et l'on a

$$R' - r' < \sqrt{\frac{R+r}{2}} \cdot \frac{\frac{R-r}{2}}{2\sqrt{\frac{R+r}{2}}} \quad \text{ou} \quad \frac{R-r}{4} \quad \text{c.q.f.d.}$$

On peut le démontrer aussi sur la seconde figure. La différence entre R' et r' est IG; entre R et r, c'est CD. EG bissecte l'angle CEI, car EC est tangente et le point G est milieu de l'arc EF. Le triangle CEI

Donne donc.

$$GI : CG :: EI : EC$$

or la perp. EI est plus petite que l'oblique EC, donc GI est plus petit que $CG = \frac{IC}{2} = \frac{CD}{4}$.

On aura donc

$$R_4 - r_4 = \delta$$

$$R_8 - r_4 < \frac{\delta}{4}$$

$$R_{16} - r_{16} < \frac{\delta}{4^2}$$

$$\dots\dots$$

$$R_{4.2^n} - r_{4.2^n} < \frac{\delta}{4^n}$$

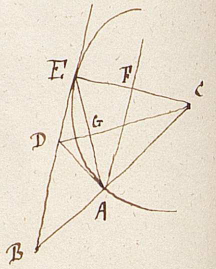
L'erreur commise sur $\frac{1}{\pi}$ en prenant pour sa valeur les décimales communes à $R_{4.2^n}$ et $r_{4.2^n}$ est donc moindre que $\frac{\delta}{4^n}$ et par suite peut être rendue moindre qu'une quantité donnée ε, car il suffira de prendre n tel que $\varepsilon < \frac{\delta}{4^n}$, c.a.d. la plus petite valeur entière de n supérieure à celle que détermine la formule

$$n = \frac{\text{Log}\,\varepsilon + \text{Log}\,\delta}{\text{Log}\,4}$$

2e. Méthode. — On se donne le rayon, et l'on cherche la longueur de la circonférence. alors, pour que le calcul indique plus facilement l'approximation sur laquelle on peut compter, je prends le rayon égal à une demi-unité linéaire. J'inscris et je circonscris à la circonférence dont le rayon est une demi-unité linéaire une suite de polygones réguliers dont le nombre des côtés va toujours en doublant, parce qu'il existe des formules simples qui permettent de déduire les périmètres les uns des autres. Le nombre qui exprime la circonférence est égal

au nombre qui exprime π. Ce dernier nombre sera donc toujours compris entre les périmètres des polygônes d'un même nombre de côtés. Donc leurs chiffres communs appartiendront aussi à π, et comme leur différence peut devenir moindre que toute quantité donnée, on peut calculer π avec l'approximation que l'on veut.

Il s'agit maintenant d'exprimer les périmètres de deux polygônes réguliers inscrits et circonscrits semblables en fonction des périmètres des polygônes réguliers d'un nombre de côtés moitié moindre. — Soit n le nombre des côtés, P et p les périmètres des polygônes dont les côtés sont $2BE$ et $2AF$, et P', p' les périmètres des polygônes réguliers d'un nombre de côtés double ; les côtés de ces polygônes sont égaux à $2ED$ et AE.



on a donc

$$P = 2n.BE \qquad P' = 4n.DE$$

$$p = 2n.AF \qquad p' = 4n.GE$$

Les triangles semblables DGE, EAF donnent

$$DE : AG :: AE : AF \quad \text{car} \quad AG = GE$$

donc

$$P' : p' :: 4n.DE : 4n.AG$$
$$:: DE : AG$$
$$:: AE : AF$$
$$:: 2nAE : 2nAF$$
$$:: p' : p$$

d'où

$$p'^2 = P'p$$

Il reste à calculer P'.

on a

$$P' : 2P :: 4nDE : 4nBE :: DE : BE.$$

D'ailleurs CD est bissectrice de l'angle BCE, on a donc

$$DE : BD :: CE : CB :: CA : CB :: AF : BE :: 2nAF : 2nBE$$
$$:: p : P$$

et par suite $DE : BE :: p : P+p$

et enfin $P' : 2P :: p : P+p$

d'où

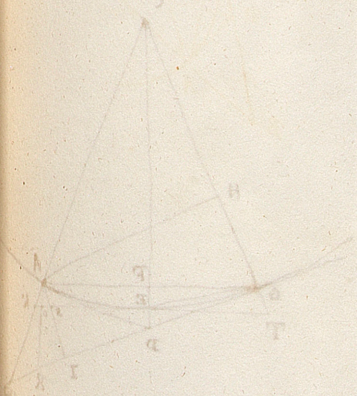
$$P' = \frac{2Pp}{P+p}$$

et par suite

$$p' = \sqrt{p\frac{2Pp}{P+p}}$$

on a les mêmes calculs à faire que dans la méthode précédente pour obtenir π avec une approximation donnée.

Il reste à prouver que la différence entre les périmètres des polygones semblables inscrits et circonscrits est moindre que le quart de la différence correspondante pour les polygones d'un nombre de côtés moitié moindre.



on a

$$P'-p' = \frac{2Pp}{P+p} - \sqrt{\frac{2Pp}{P+p}p} = \sqrt{\frac{2Pp}{P+p}}\left\{\sqrt{\frac{2Pp}{P+p}} - \sqrt{p}\right\}$$

$$P'-p' = \sqrt{\frac{2Pp}{P+p}} \cdot \frac{\frac{Pp-p^2}{P+p}}{\sqrt{\frac{2Pp}{P+p}}+\sqrt{p}}$$

or $\sqrt{p} = \sqrt{\frac{p(P+p)}{P+p}}$. donc

$$P'-p' = (P-p)\frac{p}{P+p} \cdot \frac{\sqrt{2P}}{\sqrt{2P}+\sqrt{P+p}} = (P-p)\frac{\sqrt{Pp}}{P+p} \cdot \frac{\sqrt{2p}}{\sqrt{2P}+\sqrt{P+p}}$$

$$P'-p' < \frac{1}{2}(P-p)\frac{\sqrt{Pp}}{P+p}$$

d'ailleurs

$$\sqrt{Pp} < \frac{1}{2}(P+p)$$

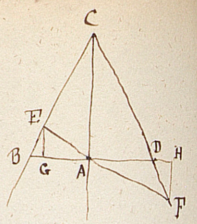
donc

$$P'-p' < \frac{P-p}{4}$$

on peut aussi le voir par la géométrie. Mais pour cela il faut démontrer le lemme suivant.

Si par un point A de la bissectrice d'un angle on mène une perp. à cette bissectrice, cette ligne est

la plus courte de toutes celles qu'on peut mener par le point A dans l'intérieur de l'angle BCD.



Soit BF une autre droite passant par le point A. J'abaisse les perp. FH et EG. CA étant bissectrice de l'angle C, on a

$EC : CF :: EA : AF$, or $EC < CF$ donc $EA < AF$

Les triangles semblables EAG, AHF donnent

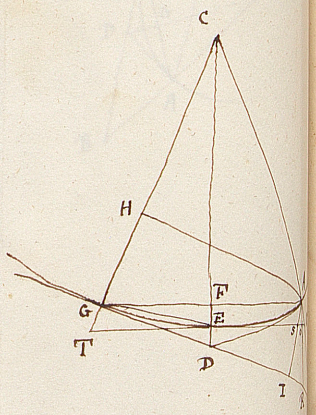
$EA : AF :: EG : FH$ donc $EG < FH$

Les tr. sembl. EBG, DHF donnent

$EG : FH :: BG : DH$ donc $BG < DH$

donc $BG + GD < DH + GD$ ou $BD < GH$

d'ailleurs $GH < EF$, donc à fortiori $BD < EF$.



Cela posé, soit BG le demi-côté du polygone circonscrit, AH du polyg. inscrit, KT le côté du polygone circonscrit semblable d'un nombre double de côtés. on a

$P = 2n\,BG$ $\qquad P' = 2n\,KT$

$p = 2n\,AH$ $\qquad p' = 2n\,AG$

donc

$P - p = 2n\,BI$ $\qquad P' - p' = 2n\,KS$

en menant AI parallèle à CG et AOR parallèle à CD. Je dis que $KS < \frac{BI}{4}$. La ligne GE bissecte l'angle G. alors on a

$FE : ED :: FG : DG$ donc $FE < ED$

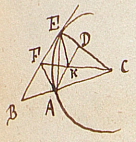
et par conséquent $FE < \frac{FD}{2} = \frac{AR}{4}$ ou

$Ao < \frac{AR}{4}$. donc KS est plus petit que le $\frac{1}{4}$ de la perp. à AR menée par le point R, et par suite plus petit que le quart de BI, car nous avons vu que cette perp. est plus courte que BI.

donc ....

3°. Méthode. on se sert de la formule $\pi = \frac{\text{cercle } R}{R^2}$ on se donne R, et il faut en déduire la surface du cercle. Pour cela je prends le rayon égal à l'unité linéaire, parce qu'alors R^2 est l'unité de surface, et $\frac{\text{cercle } R}{R^2}$ est le nombre qui exprime la surface du cercle, et en même temps π. Au cercle dont le rayon est 1 j'inscris et je circonscris une suite de polygones réguliers semblables dont le nombre des côtés va toujours en doublant. Je calcule la surface de chacun d'eux par des relations simples entre les surfaces des deux polygones et celles des deux suivants, et comme le nombre π est toujours compris entre les nombres qui expriment les surfaces des deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, leurs chiffres communs appartiennent à la valeur de π. Leur différence peut devenir plus petite que toute quantité donnée : on peut donc obtenir π avec tel degré d'approximation qu'on le désire. on peut même savoir combien de polygones il faut calculer pour l'obtenir avec l'approximation demandée.

Soient A, B les surfaces de deux polygones réguliers semblables, inscrit et circonscrit ; A', B' les surfaces des polygones d'un nombre de côtés double.



on a $B = 2n\, BCE \qquad B' = 4n\, FCE$

$A = 2n\, ACD \qquad A' = 2n\, ACE$

delà $A' : A :: 2n\, ACE : 2n\, ACD$

$:: ACE : ACD$

$:: CE : CD$

$:: CB : CA$

$:: BCE : ACE$

$:: 2n\, BCE : 2n\, ACE$

ou $A' : A :: B : A'$

$$A' = \sqrt{AB}$$

De même

$$B' : 2B :: 2n\ FCE : 2n\ BCE$$
$$:: FCE : BCE$$
$$:: EF : EB$$

or

$$EF : FB :: CE : CB :: CA : CB :: CD : CE$$
$$:: ACD : ACE$$
$$:: A : A'$$

donc

$$EF : EB :: A : A + A'$$

et enfin

$$B' : 2B :: A : A + A'$$

$$B' = \frac{2AB}{A + A'}$$

Il s'agit maintenant de démontrer que la différence $B' - A'$ est moindre que le quart de $B - A$. — Je joins EK ; CF étant perp. sur AE, la fig. $EKAF$ est un losange, donc $AK = EF$, on a

$$B - A = 2n\ BEDA = 2n\ (BE + AD)\ \frac{ED}{2}$$

$$B' - A' = 2n\ AFE = 2n\ FE \cdot \frac{ED}{2}$$

Il suffit de démontrer que

$$EF < \frac{BE + AD}{4}$$

or $DK : KA :: EF \cdot FB$ donc $\overline{EF}^2 = DK \cdot FB$.

et comme la moyenne arithmétique entre deux nombres est plus grande que la moyenne géométrique,

$$2EF < DK + FB$$

ajoutant d'une part $2EF$ et de l'autre $KE + EF$

il vient

$$4EF < BE + AD \qquad \text{c.q.f.d.}$$

On peut aussi le démontrer au moyen des formules. on a

$$B'-A' = \frac{2AB}{A+\sqrt{AB}} - \sqrt{AB} = \sqrt{AB}\left\{\frac{2\sqrt{AB}}{A+\sqrt{AB}} - 1\right\}$$

$$= \sqrt{AB}\cdot\frac{\sqrt{AB}-A}{\sqrt{AB}+A} = \sqrt{AB}\,\frac{A(B-A)}{(\sqrt{AB}+A)^2}$$

or $\sqrt{AB} < A$. donc

$$B'-A' < \sqrt{AB}\,\frac{A(B-A)}{4AB} = \sqrt{AB}\,\frac{B-A}{4B}$$

or $B > \sqrt{AB}$, donc

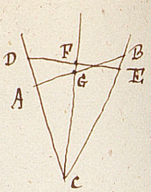
$$B'-A' < \frac{B-A}{4}.$$

4e. Méthode. on se sert encore de la formule $\pi = \frac{\text{cercle } R}{R^2}$, mais on se donne la surface du cercle et il s'agit de déterminer le rayon. Pour simplifier les calculs, on prend le cercle égal à l'unité de surface, et alors le nombre qui exprime combien de fois le carré du rayon contient cette unité superficielle est $\frac{1}{\pi}$.

La méthode employée pour déterminer R est celle-ci: on construit un polygône dont la surface est connue et égale à 1, et dont le rayon et l'apothème sont aussi connus. on cherche le rayon et l'apothème du polygône isosurface d'un nombre de côtés double, en fonction du rayon et de l'apothème du polygône précédent. Les décimales communes au rayon et à l'apothème du polygône isosurface auquel on s'arrête appartiennent à la valeur du carré du rayon du cercle donné.

Nous allons maintenant établir les formules au moyen desquelles on peut passer du rayon et de l'apothème d'un polygône au rayon et à l'apothème du polygône isosurface d'un nombre de côtés double.

Lemme. Si un triangle isocèle a même angle au sommet qu'un triangle qcq. ABC, et que le carré CD^2 d'un de ses côtés adjacents au sommet soit égal au produit AC.BC des côtés adjacents au même sommet dans le second triangle, les deux triangles sont équivalents.



Cela résulte de ce que deux triangles qui ont un angle égal sont entre eux comme les produits des côtés qui comprennent cet angle.

Supposons maintenant que l'angle en A soit droit. La bissectrice CF donne le rapport

$$AC : CB :: AG : GB$$

$$AC : AC+CB :: AG : AB :: ACG : ACB$$

Les deux triangles CDF et CAG sont rectangles, ont un angle aigu commun, donc ils sont semblables et donnent la relation

$$CAG : CDF :: \overline{CA}^2 : \overline{CF}^2$$

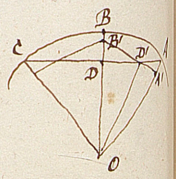
De cette proportion et de la précédente on déduit

$$AC : AC+CB :: \overline{CA}^2 : 2\,\overline{CF}^2$$

De sorte que l'on aura entre les deux triangles ABC, DCE les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{CF}^2 = \dfrac{CA(CA+CB)}{2} \\ \overline{CD}^2 = CA.CB \end{array} \right.$$

Revenons maintenant aux polygones. Soit AC le côté du polygone régulier de n côtés. Je prolonge l'apothème jusqu'en B' de manière qu'on ait



$$\overline{OB'}^2 = OB.OD$$

Je prends OA' = OB' et je dis que A'B' est le côté du polygone régulier isosurface d'un nombre double de côtés. En effet les triangles A'OB' et

DOA sont équivalents ; on a de plus d'après ce qui précède

$$R' = \sqrt{Rr} \qquad r' = \sqrt{r \cdot \frac{R+r}{2}}$$

Ces formules montrent que $R' < R$ et $r' > r$. Par conséquent le rayon et l'apothème se rapprochent de plus en plus quand on augmente le nombre des côtés. Pour démontrer que leur différence peut devenir moindre que toute quantité donnée, il suffit de faire voir que $R' - r' < \frac{R-r}{4}$.

$$R' - r' = \sqrt{Rr} - \sqrt{r}\,\frac{R+r}{2} = \sqrt{r}\left(\sqrt{R} - \sqrt{\frac{R+r}{2}}\right)$$

$$R' - r' = \sqrt{r}\,\frac{\frac{R-r}{2}}{\sqrt{R} + \sqrt{\frac{R+r}{2}}}$$

D'ailleurs $\sqrt{R} > \sqrt{r}$ et $\sqrt{\frac{R+r}{2}} > \sqrt{r}$. Donc

$$R' - r' < \sqrt{r} \cdot \frac{\frac{R-r}{2}}{2\sqrt{r}} = \frac{R-r}{4} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

---

648. Les rayons vecteurs d'une parabole croissant en progression géométrique, les sinus des angles des tangentes avec l'axe des x décroissent aussi en progression ~~arithmétique~~ géométrique.

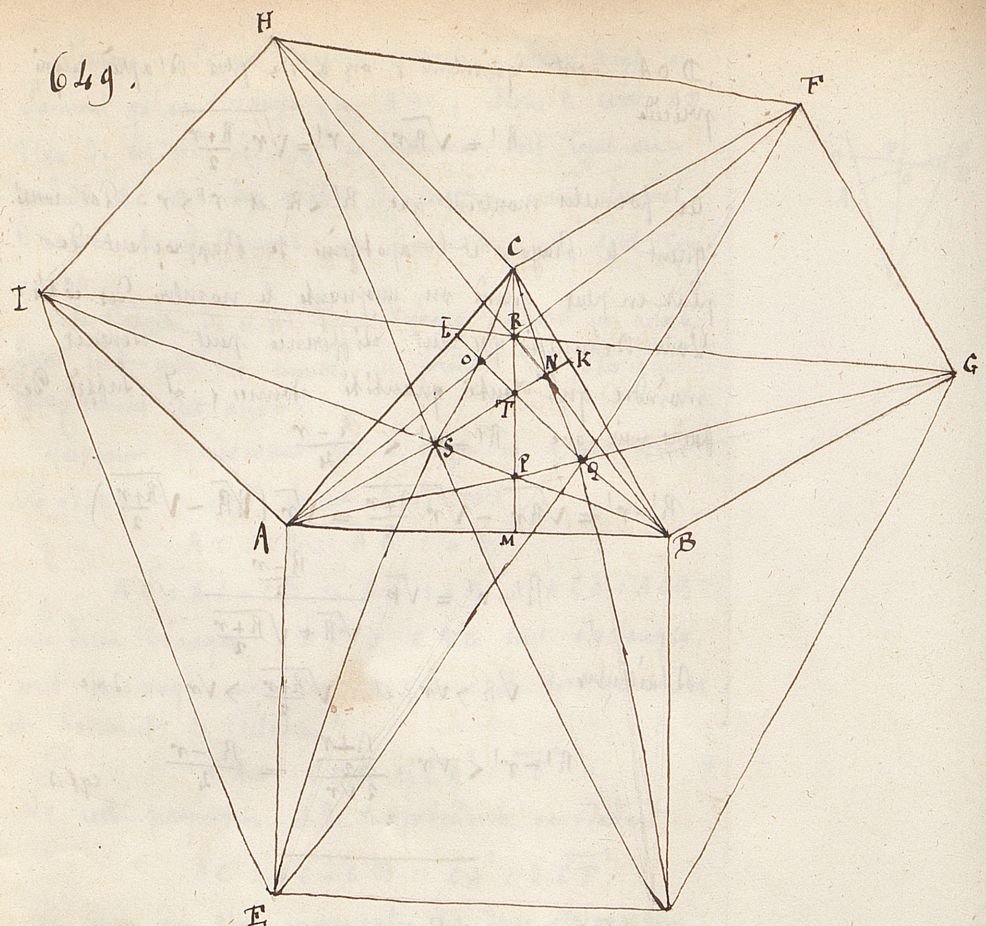
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{p}{y'} . \quad \sin \alpha = \frac{p}{\sqrt{y'^2 + p^2}} = \frac{p}{\sqrt{2px' + p^2}} = \frac{p}{\sqrt{2p(x' + \frac{p}{2})}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}}{\sqrt{x' + \frac{p}{2}}}$$

$$\sin \alpha' = \frac{\sqrt{\frac{p}{2}}}{\sqrt{x'' + \frac{p}{2}}}$$

Donc, si $\frac{x'' + \frac{p}{2}}{x' + \frac{p}{2}} = K^2$ on aura $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} = K$ c.q.f.d.

649.



La figure montre clairement quels droites doivent concourir. De plus

CD et AG sont perp. en Q, AF et BH en R, Voir 1544.
BI et CE en S.

Les droites EF, IG, HD, qui passent respectivement par les points Q, R, S, y bissectent les angles formés par les six autres droites.

La figure est mal faite : les hauteurs ne passent qu'en P, O et N, et T, non en R, S et Q.
Mais si l'on joint AS, BQ, CR, on aura 3 droites qui se coupent en un ~~point~~ même

point V, et sont respect. perp. sur BH, EF, GI.

Les 3 triangles DBG, FCH et IAE sont équivalents entre eux et au triangle ABC.

La somme $\overline{DG}^2 + \overline{FH}^2 + \overline{IE}^2 = 3(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2)$.

650. Soient deux droites D et D'. Un mobile de masse m se meut sur la première avec une vitesse v ; un second mobile m' se meut sur la seconde avec une vitesse v'. Le mouvement est uniforme. Ils quittent en même temps le plan des xy, on demande le lieu décrit par le centre de gravité du système.

651. La courbe

$$\begin{cases} \varphi(xyz) = 0 \\ \psi(xyz) = 0 \end{cases}$$

peut-elle se placer sur le plan

$$ax + by + cz + d = 0 \quad ?$$

652. Si $P = 0$ $Q = 0$ sont les Eq. de deux plans, $P + \lambda Q = 0$ représente tous les plans passant par l'intersection des deux premiers

653. Si $A = 0$ $B = 0$ sont les Eq. d'une droite, $0 = A + \lambda B$ représente un plan qui la contient.

654. On donne deux droites, et par l'une on mène un plan arbitraire, par l'autre un plan faisant avec le premier un angle donné. Lieu de leur intersection.

655. Lieu des droites passant par un point

et faisant des angles égaux avec deux droites données.

656. Soit m la longueur de la médiane aboutissant au côté a dans un triangle sphérique : on a

$$\cos b + \cos c = 2 \cos m \cos \frac{a}{2}$$

657. Lieu des points situés sur une sphère et tels que la somme des cosinus de leurs distances à deux points fixes de la sphère soit constante.

658. Si des masses égales placées aux sommets d'un polygone se meuvent sur les côtés, prolongés dans le même sens, avec des vitesses constantes, respectivement proportionnelles aux côtés du polygone, le centre de gravité de ces masses est immobile.

659. Tous les cônes qui ont leur sommet en un même point d'une sphère, et pour base un petit cercle qcq. sont coupés suivant des cercles par un plan perp. au rayon qui passe par leur sommet commun.

660. Si l'on considère les Eq.

$$x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0$$

$$x^{2n} - 2x \cos n\alpha + 1 = 0$$

toute solution de la première est une solution de la seconde.

661. L'Eq. $\sqrt[3]{2} = p + \sqrt{q}$ est impossible, p et q étant entiers.

662. On a un petit cercle d'une sphère. En chaque point on lui mène un grand cercle

tangent sur lequel on prend, à partir du contact, un arc de 90°. Lieu des extrémités de ces arcs.

663. on a $\operatorname{tg}(n+1) - \operatorname{tg} n < \frac{1}{2n}$ — Cela doit être faux : ex. pour $n = \frac{\pi}{2} - 1$.

664. $\operatorname{tg} 4a$ est une fonction rationnelle et fractionnaire de $\operatorname{tg} a$, dont le numérateur est du 3e. degré et le dénominateur du 4e. Retrouver la formule.

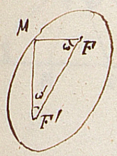
665. Conditions entre les côtés d'un triangle pour qu'un angle soit triple d'un autre. — Réciproquement. si cette relation existe, un angle est-il triple d'un autre ?

on trouve

$$\frac{a^2-b^2-c^2}{2bc} = \frac{4(b^2-a^2-c^2)^3}{2ac} - \frac{3(b^2-a^2-c^2)^2}{2ac}$$

Expliquer sur la figure pourquoi cette relation est divisible par $a+b+c$.

666. on a



$$\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} = \text{Constante}.$$

Dans un triangle qq. on a

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-\beta)(p-\gamma)}{p(p-\alpha)}} \qquad \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(p-\alpha)(p-\gamma)}{p(p-\beta)}}$$

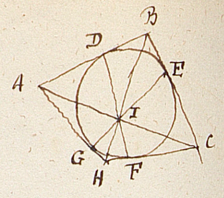
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}\,\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{p-\gamma}{p}$$

or dans ce cas-ci, le côté γ est l'excentricité de l'ellipse, qui est égale à $2c$; $p-\gamma = a-c$ et $p = a+c$. donc $\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}\,\operatorname{tg}\frac{\omega'}{2} = \frac{a-c}{a+c}$

cqfd.

667. Dans un quadrilatère circonscrit, les diagonales et les droites qui joignent les points

de contact se rencontrent en un même point.



(x) arc DGF

Soit I la rencontre de AC et DF. Les triangles ADI, CIF ont un angle égal, AID = CIF ; l'angle ADF = $\frac{(x)\ \text{arc } DGF}{2}$, l'angle DFC = $\frac{\text{arc } DEF}{2}$ donc ils sont supplémentaires, et les triangles ADI, CIF ont un angle égal et un supplémentaire. Donc les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels aux côtés opposés aux angles supplémentaires. Donc on a la proportion.

$$AD : CF :: AI : CI$$

Soit I' l'intersection de AC et EG. on aura de même

$$AG : CE :: AI' : CI'$$

Or AG = AD, CF = CE. Donc

$$AI' : AI :: CI' : CI$$

Donc I' et I se confondent.

On démontrerait de même que BH, DF, EG se coupent en un même point ;

Donc, puisque . . . . etc. cqfd.

668. Soit a le côté de ~~la sphère~~ tétraèdre régulier. Trouver :

$$\text{Volume} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

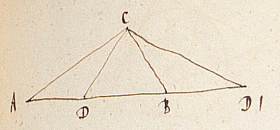
$$\text{Surface} = a^2\sqrt{3}$$

$$\text{Rayon de la sphère circonscrite} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{" \quad " \quad inscrite} = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$

669. Si l'on joint un point de l'intérieur d'un triangle aux trois sommets, la somme de ces lignes est plus petite que le périmètre du

triangle et plus grande que le demi-périmètre.



670. ABC un triangle. on prend

$BD = BD' = BC$

1°. l'angle $ADC = 2\,ABC$

2°. — $DCD' = 1$ dr.

3° — $CDB = 1$ dr $- \frac{1}{2}\,ABC$

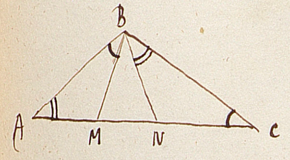
671. Dans un triangle, on divise les angles à la base en deux parties égales par des droites qui se rencontrent. quelle est la valeur de l'angle qu'elles forment,

1°. le triangle étant équilatéral,

2°. — — isocèle, et l'angle du sommet double de ceux de la base;

3°. — — — et l'angle du sommet moitié de ceux de la base,

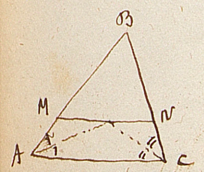
4°. en général.



672. ABC un triangle qcq. on mène BM et BN afin que .... Le triangle BMN est isocèle.

673. La droite qui joint le sommet d'un triangle rectangle au milieu de l'hypoténuse est égale à la moitié de cette hypoténuse.

674. Soit un triangle rectangle dont l'hypoténuse $CB = 2\,CA$; l'angle $B = \frac{1}{3}$ dr. et réciproquement.

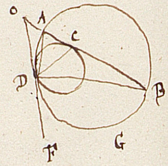


675. Mener MN telle que $MN = AM + NC$.

676. Dans un cercle, deux cordes égales AOB, A'OB' se coupent, et AO = A'O, BO = B'O.

677. Lieu des points dont la somme des distances à deux droites est connue. (c'est le périmètre d'un rectangle).

678. On a deux circonf. tg. intér.t. on mène AB tang. à la petite. DC bissecte ADB.



on a DO = OC. Donc les angles ODC = OCD.

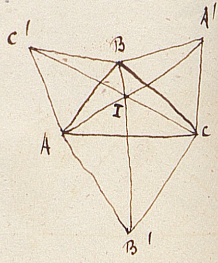
D'ailleurs BAD = BDF comme ayant même mesure.

Le triangle ADC donne ODC + ~~CAB~~ DAB + ~~BDF~~ ADC = 2 dr.

~~Dot~~ or aussi ODC + CDB + BDF = 2 dr. Donc ces 2 sommes sont égales, donc ADC = CDB.

679. Démontrer à priori (par les triangles semblables) que, dans un triangle, le produit de la base par la hauteur est constant, quel que soit le côté que l'on considère.

680. Soit un triangle quelconque ABC et deux triangles équilatéraux AB'C, ABC', A'BC formés sur ses côtés. Les droites AA', BB', CC' se rencontrent en un même point I et les angles AIB, BIC, CIA sont égaux.



Je décris le cercle circonscrit au triangle A'BC et le cercle circ. à ABC'. Ces deux cercles se coupent en un point I. Je joins IA, IB, IC. Les angles BIA, BIC ont pour supplém.t. les angles A', C' qui valent chacun $\frac{2}{3}$ dr. Donc ils sont égaux entre eux et égaux à $\frac{4}{3}$ dr. Le 3e angle AIC est donc égal à ~~2/3 − 8~~ 2 dr − 8/3 = 4/3 dr. et il est supplémentaire de B'. Le cercle circonscrit au triangle

ACB' passera donc par le point I. — Je dis que le point se trouve sur les trois droites AA', BB', CC'. En effet, joignons IB'. L'angle CIB' = CAB', = 2/3 dr. et, comme CIB = 4/3 dr., CIB + CIB' = 2 dr. donc la ligne BIB' est droite. De même les autres.

681. Quand deux triangles sont semblables, les rayons des cercles circonscrits sont dans le même rapport que les côtés homologues.

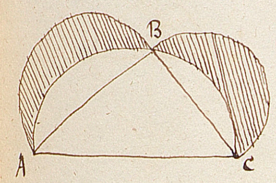
682. Id. les médianes, — les bissectrices, — les rayons des cercles inscrits.

683. Th. Un polygone équilatéral inscrit est régulier.

Th. Un polygone équiangle inscrit a ses côtés égaux de deux en deux, de sorte qu'il est régulier si le nombre de ses côtés est impair.

684. Th. Un polygone équiangle circonscrit est ~~ill~~ régulier.

Th. Un polygone équilatéral circonscrit a ses angles égaux de deux en deux, de façon qu'il est régulier si le nombre des angles est impair.



685. ABC rectangle. Sur les 3 côtés, 3 ½ circ. La partie ombrée = Surf. ABC du triangle.

686. Un prisme à bases trapeziennes a pour mesure (parallélogrammiques)

1°. La distance de ses faces parallèles multipliée par la demi-somme de ces faces.

2°. La distance des bases parallèles parallélogrammiques multipliée par la section faite à égale distance des deux.

3°. une des faces latérales non parallèles par la ½ somme

de ses distances aux extrémités de l'autre.

687. Un tronc de parallélipipède a pour mesure l'une de ses bases multipliée par le 1/4 de la somme des perp. abaissées sur cette base des extrémités de l'autre ; — ou encore : sa section droite par le 1/4 de la somme des arêtes latérales. (Bonne compos.)

Un tronc de prisme triangulaire a pour mesure sa section droite multipliée par le 1/3 de la somme de ses arêtes latérales.

688. Partager une droite en deux parties telles que la somme ou la différence de leurs carrés soit égale à un carré donné. (constructions simples.)

689. Construire les courbes

$$\rho = tg^2 \frac{\omega}{2} \qquad \rho = tg^4 \frac{\omega}{2} \qquad \rho = tg^6 \frac{\omega}{2} \quad \cdots$$

Limite de ces courbes si l'exposant croît indéfinimt.
(Bertrand).

690. On donne l'Eq.

$$x^3 - (a+b+ab)x^2 + (a^2b+ab^2+ab)x - a^2b^2 = 0$$

Peut-on déterminer a et b de manière qu'elle admette trois racines données, dont deux égales ? (id.)

691. Si $a+\sqrt{b}$ est n fois racine de $f(x)=0$, $a-\sqrt{b}$ est aussi n fois racine. — Si $a+\sqrt[3]{b}$ est racine de $f(x)=0$, existe-t-il d'autres racines entraînées par celles-ci ? (id.)

692. Combien l'Eq. $x^{10} - px^7 - q = 0$ peut-elle avoir de racines réelles. — Relations qui doivent exister entre p et q pour qu'elle en ait deux positives. — Pour qu'elle ait deux racines réelles, q

q étant donné, faut-il que p soit >0 ou <0? Trouver une limite des valeurs de p. (id.)

693. L'Eq. $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ a une racine $a+\sqrt{b}$. La trouver, a et b étant entiers. On a pour b une Eq. du 12e degré. Faire voir que cette Eq. a pour racines les quarts des carrés des différences des racines de la proposée. (id.)

694. On a entre les racines de $f(x)=0$ la relation $a-b=c-d$. Trouver ces racines. (id.)

695. On donne l'Eq. $x^3+4x^2+3x-1=0$, et, entre deux racines, la relation $\alpha=\beta^2+2\beta-2$; peut-on abaisser le degré de l'Eq.? En éliminant β, on trouve pour α l'Eq. $\alpha^3+4\alpha^2+3\alpha-1=0$. Interprêtez cette particularité. — Si α,β,γ sont les racines, on doit avoir

$$\alpha=\beta^2+2\beta-2 \qquad \beta=\gamma^2+2\gamma-2 \qquad \gamma=\alpha^2+2\alpha-2$$

(id.)

696. On donne l'Eq. $x^3+px^2+qx+r=0$ n'ayant pas de racines imaginaires; on connaît la somme des carrés des racines. Assignez leur limite supérieure. (id.)

697. Etant données les Eq.

$$\begin{cases} x^3+px^2+qx+r=0 \\ x^2+mx+n=0 \end{cases}$$

et p, q, r: déterminer m et n de manière que ces deux Eq. aient deux racines communes. (id.)

698. Trouver la somme

$$1.2.3+2.3.4.+3.4.5+\cdots+n(n+1)(n+2).$$

On a $1.2.3=1(1+1)(1+2)=\dfrac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4}$

$$1.2.3 + 2.3.4 = \frac{1(1+1)(1+2)(1+3)}{4} + (1+1)(1+2)(1+3) = \frac{(1+1)(1+2)(1+3)(1+4)}{4}$$

$$= \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4}$$

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 = \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4} + (2+1)(2+2)(2+3)$$

$$= \frac{(2+1)(2+2)(2+3)(2+4)}{4} = \frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{4}$$

De même on verrait que

$$1.2.3. + 2.3.4 + 3.4.5 + 4.5.6 = \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{4}$$

ainsi par analogie, la somme demandée sera

$$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

par la méthode connue, on montre que la formule est générale.

On peut au moyen de cette formule trouver la somme des cubes

$$1 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$$

En effet la suite

$$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

peut se décomposer ainsi

~~$1(1+1)(2+1) + 2(2+2)(2+2) + 3(3+1)(3+2) + \cdots + n(1+n$~~

$$1(1+1)(2+1) + 2(1+2)(2+2) + 3(1+3)(2+3) + \cdots + n(1+n)(2+n)$$

ou encore, en effectuant les produits partiels,

$$\left.\begin{array}{ll} 2(1+2+3+\cdots+n) & \text{ou } n(n+1) \\ +\,2(1+2^2+3^2+\cdots+n^2) & \text{ou } \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} \\ +\,(1+2^2+3^2+\cdots+n^2) & \text{ou } \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ +\,(1+2^3+3^3+\cdots+n^3) & \text{ou } \sum_{a=1}^{a=n} a^3 \end{array}\right\} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Donc

$$\sum_{a=1}^{a=n} a^3 = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} - (n)(n+1) - \frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3) - 4n(n+1) - 2n(n+1)(2n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

ainsi la somme des cubes des n premiers nombres est égale au carré de leur somme.

699. Soient $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ .. les racines de l'Eq. $x^m + A_1 x^{m-1} + \cdots + A_{m-1} x + A_m = 0$

on a

$$S = \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\alpha}{\delta} + \cdots + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\beta}{\delta} + \cdots + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} + \cdots$$

$$+ \frac{\delta}{\alpha} + \frac{\delta}{\beta} + \frac{\delta}{\gamma} + \cdots + \text{etc} = \frac{A_1 A_{m-1}}{A_m} - m$$

Demonstration. on a

$$S = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\delta}{\alpha} + \cdots + \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\beta} + \frac{\delta}{\beta} + \cdots + \frac{\alpha}{\gamma} + \frac{\beta}{\gamma} + \frac{\delta}{\gamma} + \cdots$$

or $\beta + \gamma + \delta + \cdots = -(A_1 + \alpha)$, $\alpha + \gamma + \delta + \cdots = -(A_1 + \beta)$ etc. donc

$$S = -\left\{ \frac{A_1 + \alpha}{\alpha} + \frac{A_1 + \beta}{\beta} + \frac{A_1 + \gamma}{\gamma} + \frac{A_1 + \delta}{\delta} + \cdots \right\}$$

$$= -A_1 \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \cdots \right) - m$$

D'ailleurs

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\delta} + \cdots = \frac{\beta\gamma\delta \cdots + \alpha\gamma\delta \cdots + \alpha\beta\delta \cdots}{\alpha\beta\gamma\delta \cdots}$$

$$= -\frac{A_{m-1}}{A_m}$$

donc

$$S = \frac{A_1 A_{m-1}}{A_m} - m \qquad \text{cqfd.}$$

700. Trouver la limite du produit

$$\cos a \cos\frac{a}{2} \cos\frac{a}{4} \cos\frac{a}{8} \cos\frac{a}{16} \cos\frac{a}{32} \cdots$$

De la formule $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$ on tire

$$\cos a = \frac{\sin 2a}{2 \sin a}$$

De même

$$\cos\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2 \sin\frac{a}{2}} \qquad \cos\frac{a}{2^2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{2 \sin\frac{a}{2^2}} \cdots$$

et, en substituant,

$$\cos a \cos \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2^2} \cos \frac{a}{2^3} = \frac{\sin 2a \sin a \sin \frac{a}{2} \sin \frac{a}{2^2} \cdots}{2 \sin a \; 2 \sin \frac{a}{2} \; 2 \sin \frac{a}{2^2} \; 2 \sin \frac{a}{2^3} \cdots}$$

$$= \frac{\sin 2a}{2^{n+1} \sin \frac{a}{2^n}}$$

or, à la limite, l'arc se confond avec le sinus ; pour n suffisam^t. grand on a donc

$$\sin \frac{a}{2^n} = \frac{a}{2^n} \quad \text{et} \quad 2^{n+1} \sin \frac{a}{2^n} = 2a$$

donc la limite cherchée est

$$\frac{\sin 2a}{2a}$$

701. Tout parallélogramme circonscrit à un cercle est un losange. — Si l'on joint les points de contact, on forme un rectangle. — Le produit de l'aire du rectangle par celle du losange est constant.

Facile avec un peu de trigonométrie ($S = \frac{1}{2} ab \sin c$).

702. $\frac{2+\sqrt{5}}{3-\sqrt{7}}$ est incommensurable.

703. La cinquième puissance d'un nombre est terminée par le même chiffre que ce nombre.

Je dis que $x^5 - x = \dot{10}$ (multiple de 10)

ou bien $x(x^2+1)(x^2-1) = \dot{2}.\dot{5}$

or, si x est pair, le produit total est divisible par 2 ; s'il est impair, x^2+1 et x^2-1 sont pairs, et le produit est encore $\dot{2}$. Si $x = \dot{5}$, le produit total est divisible par $\dot{5}$. S'il ne l'est pas, il est de la forme $x = \dot{5} \pm 1$ ou $x = \dot{5} \pm 2$, et l'on a $x^2 = \dot{5} \pm 1$ et $x^2 = \dot{5} \pm 4 = \dot{5} \mp 1$. Donc on a dans ce cas $x^2 - 1$ ou $x^2 + 1 = \dot{5}$. Donc —

c.q.f.d.

704. Corollaire du précédent. — Si donc on a l'Eq.

$$x^5 = a^5 + b^5$$

$b < 10$, on ne pourra donner à x que des valeurs terminées par le même chiffre que $a+b$. Or $x = a+b$ donne $x^5 > a^5 + b^5$, et est trop fort, ainsi que $x = a+b+10$ à fortiori. La valeur $x = a+b-10$ donne $x < a$, et est par conséquent trop faible. Donc l'Eq. est impossible, si $b < 10$.

705. Résoudre les Eq.

$$\begin{cases} a^x + b^y = c \\ a'^x + b'^y = c' \end{cases}$$

on peut déterminer α β tellemt. que

$$a^\alpha = a' \quad b^\beta = b'$$

et, en substituant, la 2de Eq. devient alors

$$(a^x)^\alpha + (b^y)^\beta = c$$

Si je pose $a^x = z$, $b^y = v$, il suffit de déterminer z et v par les deux Eq.

$$\begin{cases} z + v = c \\ z^\alpha + v^\beta = c' \end{cases}$$

qu'on résout algébriquement dans certains cas.

706. Dans la suite

$$a \quad 2a \quad 3a \quad 4a \quad \ldots \quad ba$$

le premier terme divisible par b est tel que, si n est son rang, $\frac{b}{n}$ est le P. G. C. D. entre a et b.

Il est d'abord évident que la suite contient le p. p. m.

de a et de b. Car s'ils sont premiers entre eux, ce p.p.m est ba, et s'ils ont un diviseur commun, c'est le produit de a par un nombre plus faible que b. Soit donc na ce pp.m. on sait que le produit de deux nombres est égal au produit de leur pp m. par leur p gc. D. Donc $ab = and$. D'où $d = \frac{b}{n}$.

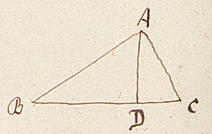
707. Le nombre des multiples de a et de b contenus dans la même suite est égal à leur P. G. C. D.

708. Le P. G. C. D. de deux nombres est le même que celui de leur somme et de leur P. P. Me.

709. Dans le triangle ABC, on a

$$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{BD}{CD}$$

AD étant perp. à BC; prouver que le triangle est rectangle. (ou isocèle)



on a $\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 \quad \overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2$

Donc l'hypothèse devient

$$\frac{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2}{\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2} = \frac{BD}{CD}$$

$$(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2)\, CD = (\overline{AD}^2 + \overline{CD}^2)\, DB.$$

$$\overline{AD}^2 (BD - CD) = \overline{BD}^2 . CD - BD . \overline{CD}^2$$

$$= BD . CD\, (BD - CD) \quad (x)$$

$$\overline{AD}^2 = BD . CD$$

(x) en supprimant la solution BD = DC, qui répond au triangle isocèle.

Je dis que si sur BC comme diam. on décrit une circ. elle coupera AD en A. car sinon, soit A' l'intersection. on aura

$$\overline{A'D}^2 = BD . CD$$

$$A'D = AD \quad \text{c.q.f.d.}$$

voir 626.

710. Théorèmes de Fermat et de Wilson.

Considérons la suite

$$a \quad 2a \quad 3a \quad .. \quad (p-1)a$$

p étant premier avec a. Si l'on divise chaque terme par p, on obtient toujours un reste, et tous ces restes sont différents. car si l'on avait

$$ma = pq + r$$

$$m'a = pq' + r$$

m et $m' < p$, il en résulterait

$$(m-m')a = p(q-q')$$

Donc p diviserait $(m-m')$, absurde.

Donc

$$\begin{cases} a = pq_1 + r_1 \\ 2a = pq_2 + r_2 \\ 3a = pq_3 + r_3 \\ \ldots \\ (p-1)a = pq_{p-1} + r_{p-1} \end{cases}$$

et les nombres r_1 r_2 .. r_{p-1} étant tous différents constituent la suite des nombres $1, 2, 3, .. (p-1)$ dans un ordre qcq. — En multipliant, on a

$$(p-1)!\, a^{p-1} = \dot{p} + (p-1)!$$

ou

$$(p-1)!\,(a^{p-1}-1) = \dot{p}$$

Si maintenant on suppose p premier absolu, il est premier avec le produit $(p-1)!$ Donc

$$a^{p-1} - 1 = \dot{p}$$

Donc, si p est un nombre premier, $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Ne considérons plus maintenant pour a que des nombres < p.

On appelle Nombres associés par Rapport à p deux nombres dont le produit est un multiple de p augmenté d'une Unité.

Tout nombre a son associé : ou autrement, on peut toujours satisfaire l'éq. Indéterminée

$$ax = \dot{p} + 1 \quad \text{c'est Evid}^t.$$

Le même nombre ne peut avoir deux associés ; car si l'on avait par exemple

$$ab = \dot{p} + 1 \qquad ab' = \dot{p} + 1$$

il en Résulterait

$$a(b - b') = \dot{p}$$

ce qui est absurde, puisque $p > a$, $p > b$, $p > b'$.

Il n'y a que deux nombres qui sont leurs propres associés. ce sont 1 et $p-1$. C'est évident qu'ils le sont, et je dis de plus qu'il n'y en a pas d'autres. Car pour cela il faut que l'on ait

$$a^2 - 1 = \dot{p}$$

ou

$$(a-1)(a+1) = \dot{p}$$

et, p étant premier, cela exige que l'on ait

$$(a-1) = \dot{p} \quad \text{ou} \quad (a+1) = \dot{p}$$

or $a < p$. Donc c'est Impossible, à moins que l'on n'ait

$$a = 1 \quad \text{et} \quad a = p - 1$$

Les nombres

$$2, 3, 4, \ldots (p-2)$$

étant associés deux à deux, leur produit sera un multiple de p augmenté d'une Unité. Donc

$$(p-2)! = \dot{p} + 1$$

et, en multipliant de part et d'autre par $(p-1)$

$$(p-1)! = \dot{p} - 1$$

$$(p-1)! + 1 = \dot{p}$$

ce qui est le Théorème de Wilson que l'on énonce ainsi :

p étant un nombre premier, le produit des nombres $1.2.3 \ldots (p-1)$ augmenté d'une unité est divisible par p.

Réciproquement, si l'on a

$$(p-1)! + 1 = \dot{p}$$

p est un nombre premier.

En effet, s'il n'était pas premier, il aurait pour facteur un des nombres $1, 2, 3, \ldots (p-1)$ qui, divisant le second membre et une partie du premier, devrait diviser 1, ce qui est absurde.

711. On a

$$a + a' + a'' + \ldots < \sqrt[2]{n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots)}$$

Pour 2 quantités, c'est évident, car

$$(a - a')^2 > 0.$$

Lorsque la formule est vraie pour n quantités, elle l'est pour $n+1$. En effet, si l'on a

$$(1) \qquad a + a' + a'' + \ldots + a_{n-1} < \sqrt{n(a^2 + a'^2 + \ldots + a_{n-1}^2)}$$

je dis que

$$a + a' + a'' \ldots + a_n < \sqrt{(n+1)(a^2 + a'^2 + \ldots + a_n^2)}$$

En élevant au carré, il vient

$$(a + a' + a'' + \ldots + a_{n-1})^2 + 2(a + a' + \ldots + a_{n-1})a_n + a_n^2$$

$$< n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots + a_{n-1}^2) + (a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots + a_n^2) + na_n^2$$

Tenant compte de (1), on voit qu'il reste

$$2(a+a'+a''+\dots+a_{n-1})a_n < a^2+a'^2+\dots+a_{n-1}^2+na_n^2$$

ce qui est vrai, car ce n'est que la somme des inégalités

$$2a \cdot a_n < a^2+a_n^2$$

$$2a' \cdot a_n < a'^2+a_n^2$$

etc.

c.q.f.d.

712. Enveloppe des circonférences décrites sur les rayons vecteurs d'une section conique.

L'origine étant au foyer : Eq. de la conique

(1) $$y^2+x^2-(mx+t)^2=0$$

x' y' l'extrémité du rayon vecteur : l'Eq. de la circonf. est

$$\left(y-\frac{y'}{2}\right)^2+\left(x-\frac{x'}{2}\right)^2=\frac{y'^2+x'^2}{4}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} y^2+x^2 &= yy'+xx' \\ \text{avec} \quad y'^2+x'^2-(mx'+t)^2 &= 0 \end{aligned}\right\} (2)$$

Pour trouver l'enveloppe il suffit (cela mérite explication) d'égaler les rapports des dérivées prises relativement à y' et x' dans les deux Eq. (2) : ce qui donne

$$\frac{2y'}{y}=\frac{2x'-2m(mx'+t)}{2x}$$

Je multiplie le 1er membre par y', le 2d par x', et j'ajoute les numérateurs entre eux et les dénominateurs : j'ai une fraction égale aux précédentes. Donc

$$\frac{y'}{y}=\frac{x'-m(mx'+t)}{x}=\frac{y'^2+mx'-mx'(mx'+t)}{yy'+xx'}$$

$$=\frac{t(mx'+t)}{y^2+x^2}$$

d'où

$$\frac{y'}{mx'+t}=\frac{ty}{y^2+x^2} \qquad \frac{x'}{mx'+t}=\frac{tx}{y^2+x^2}+m$$

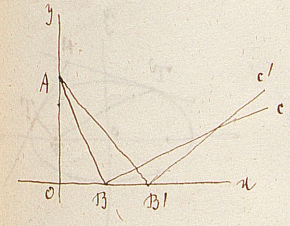
Donc
$$\frac{t^2 y^2}{(y^2+x^2)^2} + \frac{\{tx + m(y^2+x^2)\}^2}{(y^2+x^2)^2} = 1$$
d'où
$$(1-m^2)(y^2+x^2) - 2mtx - t^2 = 0$$
Eq. d'un cercle.

L'Eq. de l'Ellipse rapportée à son foyer est
$$a^2y^2 + b^2x^2 - 2b^2cx = b^4$$
En identifiant avec (1), on a
$$(1-m^2) = \frac{b^2}{a^2} \quad mt = \frac{b^2c}{a^2} \quad t^2 = \frac{b^4}{a^2}$$
L'Eq. du cercle est donc
$$y^2 + x^2 - 2cx - b^2 = 0 \;;$$
en le rapportant au centre,
$$y^2 + x^2 = a^2$$
c'est donc le cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

Pour l'hyperbole, même résultat.

Pour la parabole, on trouve la tgte au sommet.

713. Enveloppe du côté d'un angle droit dont le sommet s'appuie sur une droite fixe et dont l'autre côté passe par un point donné.



Soit $OA = b$, $OB = a$ variable. L'Eq. de AB est
$$ay + bx = ab$$
celle de Bc
$$y = \frac{a}{b}(x-a) \quad \text{ou} \quad ax - by = a^2$$
pour une autre position de Bc,

on aura $a'x - by = a'^2$

en retranchant
$$(a-a')x = a^2 - a'^2$$
$$x = a + a'$$
Si Bc et B'c' coïncident, $a = a'$,
$$x = 2a$$

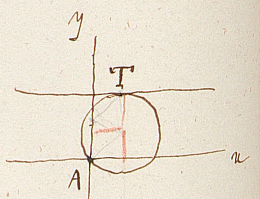
Eliminant a entre cette Eq. et l'Eq. primitive,

$$\frac{x^2}{4} = by$$

ou $$x^2 = 4by$$

Eq. d'une parabole.

714. Un cercle est mobile autour d'un point de sa périphérie. On demande le lieu des points de contact d'une tangente de direction constante.



α, β les coord. du centre. On a

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2$$

$x\ y$ celles de T : on a

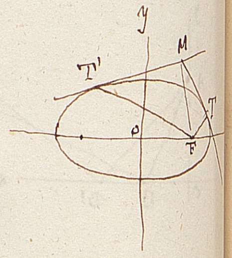
$$x = \alpha \quad y = \beta + R$$

Donc le lieu est

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Eq. d'un cercle qui passe par le point O, qui a même rayon que le cercle donné, et qui a son centre sur l'axe des y.

715. Par le foyer d'une ellipse on mène des parallèles à un système de diamètres conjugués, et par les points où ces parallèles coupent l'ellipse, on mène des tangentes. Lieu de leurs points d'intersection.



Je prends l'Eq. de l'ellipse en coord. polaires, l'origine étant au foyer F

$$\rho = \frac{b^2}{a + c\cos\omega}$$

l'Eq. d'une tgte qcq. est

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos(\alpha - \omega) + c\cos\omega}$$

α est l'angle TFx. D'ailleurs, α' étant l'angle $T'Fx$, on a la relation

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha' = -\frac{b^2}{a^2}$$

La ligne MF' bissecte l'angle TFT'. Donc

$$MFx = \omega = \frac{\alpha + \alpha'}{2}$$

donc

$$\alpha = \omega - k \qquad \alpha' = \omega + k$$

$$\operatorname{tg}(\omega - k)\operatorname{tg}(\omega + k) = -\frac{b^2}{a^2}$$

L'Eq. de la tgte devient

$$\rho = \frac{b^2}{a\cos k + c\cos\omega}$$

Entre ces deux Eq. je vais éliminer k.

$$\frac{\operatorname{tg}^2\omega - \operatorname{tg}^2 k}{1 - \operatorname{tg}^2\omega\operatorname{tg}^2 k} = -\frac{b^2}{a^2}$$

d'où

$$\cos k = \frac{\sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

L'Eq. finale est donc, après réduction

$$\rho = \frac{b^2\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{a^2\cos^2\omega + b^2\sin^2\omega} + c\cos\omega\sqrt{a^2+b^2}}$$

Transformant en coordonnées rectilignes, et rapportant ensuite au centre,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = \frac{(a^2+b^2)a^4}{b^2}$$

Ellipse homothétique de la première.

716. Résoudre

$$\begin{cases} a + b + c = s \\ a^2 + b^2 + c^2 = k^2 \\ a^3 + b^3 + c^3 = p^3 \end{cases}$$

J'élève au carré la 1ère Eq.

$$k^2 + 2(ab + ac + bc) = s^2$$

D'où $ab+ac+bc = \frac{S^2-K^2}{2} = S'$

Je l'élève au cube et je remplace :

$$(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 = S^3$$

$$p^3+3ab(a+b)+3ac(a+c)+3bc(b+c)+6abc = S^3$$

$$p^3+3ab(S-c)+3ac(S-b)+3bc(S-a)+6abc = S^3$$

$$3SS'-3abc = S^3-p^3$$

$$abc = \frac{3SS'-S^3+p^3}{3} = S''$$

Les inconnues sont racines de l'Eq.

$$x^3-Sx^2+S'x-S''=0$$

717. Résoudre

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^3+y^3=b^3 \end{cases}$$

Elevant la 1ère au cube :

$$b+3axy = a^3$$

$$xy = \frac{a^3-b^3}{3a}$$

$$x = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4b^3-a^3}{3a}}$$

pour la Réalité, $b^3 > \frac{1}{4}a^3$; donc La somme des cubes de deux quantités Réelles est plus grande que le quart du cube de leur somme.

autre Solution. – Divisons la 2e. Eq. par la 1ère :

$$\frac{x^3+y^3}{x+y} = x^2-xy+y^2 = \frac{b^3}{a}$$

or $$x^2+2xy+y^2 = a^2$$

donc $$-3xy = -a^2+\frac{b^3}{a}$$

$$xy = \frac{a^3-b^3}{3a}.$$

autre solution. Je prends

$$x+y=2a$$
$$x^3+y^3=2b^3$$

et je pose

$$x=a+z \qquad y=a-z.$$

La somme des cubes est

$$2a^3+6az^2=2b^3$$
$$a^3+3az^2=b^3$$
$$z^2=\frac{b^3-a^3}{3a}$$

Donc

$$x=a\pm\sqrt{\frac{b^3-a^3}{3a}} \qquad y=a-\sqrt{\frac{b^3-a^3}{3a}}$$

2°. Résoudre

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=b^4 \end{cases}$$

J'élève à la 4e puissance. Je trouverai

$$xy=\frac{2a^2\pm\sqrt{2a^4+2b^4}}{2}$$

C'est le signe − qu'il faut prendre, car

$$x=\frac{a}{2}+\sqrt{-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{2}\sqrt{2a^4+2b^4}}$$

et ce doit être réel.

Pour la réalité, on doit avoir

$$\frac{9}{4}\cdot a^4<\frac{1}{4}\,2a^4+2b^4$$
$$a^4<8b^4$$

Donc la somme des 4èmes puissances est plus grande que la huitième partie de la somme élevé au cube.

autre méthode

$$\begin{cases} x+y=2a \\ x^4+y^4=2b^4 \end{cases}$$

posons $x=a+z \quad y=a-z$

et élevons à la 4e. puissance. Les puissances

impaires disparaîtront. ajoutant $(a+z)^2+(a-z)^2$ et divisant par 2,

$$z^4+6a^2z^2+a^4-b^4=0$$

$$z^2=-3a^2\pm\sqrt{8a^4+b^4}$$

on ne peut prendre le signe −. donc

$$\begin{cases} x=a+\sqrt{-3a^2+\sqrt{8a^4+b^4}} \\ y=a-\sqrt{-3a^2+\sqrt{8a^4+b^4}} \end{cases}$$

3°. Résoudre

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^5+y^5=b^5 \end{cases}$$

J'élève à la 5e. puissance. Il vient

$$5xy(a^3-axy)=a^5-b^5$$

d'où xy.

autre méthode.

$$\begin{cases} x+y=a \\ x^5+y^5=b^5 \end{cases}$$

d'où

$$\frac{x^5+y^5}{x+y}=x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4=\frac{b^5}{a}$$

Puis, on élève la 1ère. à la 4e. puissance, etc.

autre méthode.

$$\begin{cases} x+y=2a \\ x^5+y^5=2b^5 \end{cases}$$

Posons $x=a+z$ $y=a-z$

on trouve $a^5+10a^3z^2+5az^4=b^5$

d'où $$z^2=-\frac{5a^3\pm\sqrt{20a^6+5ab^5}}{5a}$$

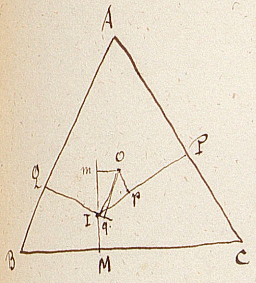
et le signe + convient seul. − d'où x et y.

Pour que les valeurs soient réelles, on devra

avoir $$20a^6 + 5ab^5 > 25a^6$$
$$b^5 > a^5$$

Voilà un théorème analogue aux précédents.)

718. Le lieu des points d'où l'on peut abaisser sur les côtés d'un triangle équilatéral des perpendic. dont la somme des carrés soit constante, est un cercle.



Soit o le centre du cercle circonscrit, I un point du lieu et IM, IP, IQ les 3 perp. Du point o j'abaisse sur chacune d'elles une perp. om, op, oq. Je désigne OI par ρ, IM par a, IP par b, IQ par c. On a

$$IM = Mm - mI$$

or, h étant la hauteur du triangle, $Mm = \frac{h}{3}$, et d'ailleurs, en désignant par α l'angle OIm,

$$mI = \rho \cos\alpha$$

Donc
$$a = \frac{h}{3} - \rho\cos\alpha$$

De même
$$b = \frac{h}{3} + \rho\cos(60-\alpha)$$

$$c = \frac{h}{3} + \rho\cos(60+\alpha)$$

Or
$$\begin{cases}\cos(60°-\alpha) = \cos 60\cos\alpha + \sin 60 \sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \\ \cos(60+\alpha) = \cos 60\cos\alpha - \sin 60\sin\alpha = \frac{\cos\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\end{cases}$$

Donc
$$(a^2+b^2+c^2) = \frac{h^2}{9} + 2\rho^2\left\{\frac{\cos^2\alpha}{2} + \frac{\sin^2\alpha}{2}\right\}$$
$$= \frac{h^2}{9} + \rho^2$$

Le résultat est indépendant de α : donc : cqfd.

On peut déduire delà que le lieu des points I tels que la surface du triangle MPQ soit constante, est un

cercle. En effet on a

$$a+b+c = h$$

on le sait.

Donc $$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=h^2$$

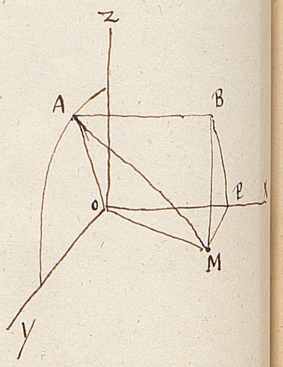
Donc, si $a^2+b^2+c^2$ est constant, $ab+ac+bc$ l'est aussi, et par suite, la surface du triangle MPQ.

Le théorème est encore vrai si le point I est extérieur au triangle.

719. Aller de A en B en touchant une droite XY et en décrivant un chemin donné l.

On substitue toujours au point A son symétrique A' et le problème se ramène à trouver une circ. passant par A et A' et tangente au cercle décrit de B comme centre avec l pour rayon.

720. Une droite AO de longueur donnée se meut perpendiculairement à OP; et, au point A, une droite AM perpend. à OA, fait avec le plan AOX un angle fixe θ. Lieu des points M où la droite AM traverse le plan YOX.



Elevons PB perp. à OP dans le plan AOX, et menons AB parallèle à OX. Enfin joignons BM qui sera parallèle perp. à AB.

Le triangle AOM, rectangle en O, donne

$$\overline{OM}^2-\overline{OA}^2=\overline{AM}^2$$

et, si OA = a

$$x^2+y^2-a^2=\overline{AM}^2$$

Le triangle ABM donne

$$AM = AB(\cos\theta)^{-1} \text{ ou } \overline{AM}^2=\frac{x^2}{\cos^2\theta}$$

Donc

$$\cos^2\theta\,(x^2+y^2-a^2) = x^2$$

$$x^2 \sin^2\theta = (y^2-a^2)\cos^2\theta$$

$$x^2 = \cot^2\theta\,.\,(y^2-a^2)$$

Eq. d'une hyperbole.

721. $\sqrt{(a^2+k)(b^2+k)}$ est toujours irrationnel.

Car on a $$\sqrt{a^2b^2+(a^2+b^2)k+k^2}$$

Pour que cela soit un carré, il faut que $a^2+b^2=2ab$ d'où $a^2+b^2-2ab=0$, $a=b$: ce qui est contre l'hypothèse.

722. La racine $m^{ième}$ du produit de m nombres est plus petite que leur moyenne arithmétique, si ces nombres ne sont pas tous égaux.

$$\sqrt[m]{a.b.c\ldots k} < \frac{a+b+c+\ldots+k}{m}$$

ou

$$a.b.c\ldots k < \left(\frac{a+b+c+\ldots+k}{m}\right)^m$$

Or le premier membre est composé de m facteurs inégaux, dont la somme est $a+b+c+\ldots+k$. Le second est composé de m facteurs égaux entre eux et à $\frac{a+b+c+\ldots+k}{m}$, dont la somme est aussi $a+b+c+\ldots+k$. Donc le second membre est plus grand que le premier.

---

723. Résoudre un triangle rectangle, connaissant l'hypoténuse, et la somme de la hauteur et des deux autres côtés.

724. Résoudre les Eq.

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \operatorname{tg} a \\ \cos x + \cos y = \operatorname{tg} b \end{cases}$$

(Il paraît qu'on transforme en produit).

725. On a $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$

on cherche $\sin 36°$ par la formule $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$. Trouver que la valeur que l'on trouve ainsi est identique à la suivante

$$\sin 36° = \frac{1}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

726. Démontrer les formules

$$\operatorname{Cotg} 2z = \frac{\operatorname{Cotg} z - \operatorname{Tg} z}{2}$$

$$\operatorname{Tg} 2z = \frac{\operatorname{Cotg}(45° - z) - \operatorname{Tg}(45° - z)}{2}$$

$$\operatorname{Coséc.} x = \frac{\operatorname{Tg}\frac{x}{2} + \operatorname{Cotg}\frac{x}{2}}{2}$$

$$\operatorname{Séc.} x = \frac{\operatorname{Tg}\left(45° - \frac{x}{2}\right) + \operatorname{Cotg}\left(45° - \frac{x}{2}\right)}{2}$$

Problèmes de Trigonométrie.

(Vernier).

---

727. Valeurs des lignes trigonométriques des arcs de 30°, 60°, 10°, 15°, 18°, 36°, $\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{20}$.

728. Relations entre les lignes trigonométriques des arcs dont la somme ou la différence est un nombre quelconque de quadrants.

729. Le rayon d'un cercle est de 0m,94 : le sinus d'un arc est de 0m,75. Trouver la graduation.

730. – Que devient la graduation d'un arc lorsqu'on passe du cercle de rayon r à un autre de rayon R tel que $\frac{R}{r} = m$, et qu'en même temps une ligne trigonométrique donnée conserve la même valeur absolue ? Cas de possibilité. applic. numériques.

731. On donne la Séc. et la Coséc. d'un arc. Trouver le rayon du cercle.

732. Trouver Sin a en fonction de Séc. a. – Supposer que Séc. a = ∞. – On trouve $\sin a = \frac{\sec^2 a - 1}{\sec^2 a}$, et, pour $a = \infty$, la lim. est 1.

733. Relation entre Séc. a et Cot. 2a.

734. $\sin(a \pm b)$ est-il $\gtrless \sin a \pm \sin b$? (1486)

735. On donne $\cos(a+b) = m$, $\cos(a-b) = n$: trouver cos a et cos b.

736. On donne $\sin(a+b) = m$, $\cos(a+b) = n$, trouver Sin a et Sin b.

737. Trouver une relation entre Tg 2a et Séc. 3a.

738. Prouver que dans un triangle $\operatorname{Tg}\frac{1}{2}(A-B) = $ ~~Tg ... Cot $\frac{C}{2}$~~ $= \operatorname{Tg}(45° - \frac{\varphi}{2}) \cot \frac{C}{2}$ si $\operatorname{Tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

739. on donne $\mathrm{Tg}(a+b) = m$, $\mathrm{Tg}(a-b) = n$, trouver $\mathrm{Tg}\,a$ et $\mathrm{Tg}\,b$.

740. Trouver un arc dont le Sinus soit double, triple… du Cosinus.
 Id. Géométriquement. – (facile : si $\mathrm{Sin}\,x = n \mathrm{Cos}\,x$, $\mathrm{Tg}\,x = n$.)

741. Trouver un arc tel que $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a = 2 \mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}a$.

742. Trouver $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a = f(\mathrm{Tg}\,a)$

$$\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Cos}\,a)$$
$$\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Sin}\,a)$$
$$\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Cot}\,a)$$
$$\mathrm{Cot}.\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Cot}.\,a)$$
$$\mathrm{Sec}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Sec}.\,a)$$
$$\mathrm{Cos}\,\frac{2a}{2} = f(\mathrm{Tg}\,a)$$
$$\mathrm{Cot}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Tg}\,a)$$

743. a-t-on $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}\mathrm{Sin}\,a$?

744. Connaissant $\mathrm{Sin}\,3a$, trouver $\mathrm{Cos}\,2a$, et récipt.

745. on donne $\mathrm{Tg}\,a = m$, $\mathrm{Tg}\,\frac{a}{2} = n$, trouver $\mathrm{Cos}\,a$.

746. Rendre calculable par Logarithmes :

$$\mathrm{Sin}\,a + \mathrm{Sin}\,b \quad (a+b = 180°)$$
$$\mathrm{Tg}\,x = \frac{a \,\mathrm{Sin}\,A}{1 + a \,\mathrm{Cos}\,A} \quad \text{(Confer 820).}$$
$$\mathrm{Sin}\,10° + \mathrm{Sin}\,20°$$
$$\mathrm{Sin}\,13° + \mathrm{Sin}\,23°$$
$$\mathrm{Sin}\,12° + \mathrm{Cos}\,13°$$
$$\mathrm{Sin}\,13° + \mathrm{Sin}\,7°$$
$$1 \pm \mathrm{Sin}\,a$$
$$1 \pm \mathrm{Tg}\,a$$
$$\mathrm{Sin}^2 a - \mathrm{Sin}^2 b$$
$$\mathrm{Tg}^2 a - \mathrm{Tg}^2 b$$

$$\sin 7^\circ + \sin 53^\circ$$

$$\sin a + \sin(a+b) + \sin(a+2b) \quad \text{connu.}$$

$$\sin 27^\circ + \sin 35^\circ$$

$$\frac{\cos a + \sin b}{\sin a - \cos b}$$

$$\frac{\sec a + \sec b}{\sec a - \sec b} \quad \left(\text{c'est } \cot\tfrac{1}{2}(a+b)\cot\tfrac{1}{2}(a-b)\right)$$

$$\sin 51^\circ + \sin 18^\circ$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{1}{\operatorname{tg} b} \quad \left(\text{c'est } \frac{\sin(a+b)}{\sin a \sin b}\right)$$

$$3\sin a - 2\cos b - 7\cos c$$

$$\sin 93^\circ + \sin 7^\circ$$

$$\sin 2^\circ + \cos 5^\circ$$

$$x = \sqrt{2} + \sqrt{3} \quad \{x = \tfrac{4}{3}\, 2\sin 45^\circ + 2\sin 60^\circ = \ldots\}$$

$$x = \frac{\sin 30^\circ + \cos 7^\circ}{\operatorname{tg} 13^\circ - \operatorname{tg} 2^\circ}$$

$$\frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}$$

$$\operatorname{tg} a + \sec b$$

$$\sec 30^\circ + \sec 40^\circ$$

$$\frac{3\operatorname{tg} a - 2\sin 3a}{5 + 3\sin a}$$

$$x = 3\sec a + 2\operatorname{tg} b - 15\sin c$$

$$\sec + \operatorname{cosec} b$$

$$\left.\begin{array}{l}\sin a + \sin b + \sin c \\ \cos a + \cos b + \cos c \\ \sin 2a + \sin 2b + \sin 2c\end{array}\right\} \quad (a+b+c = 180^\circ)$$

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d \quad (a+b+c+d = 360^\circ)$$

727. Calculer par les Tables les racines, supposées réelles, de $x^2 + px + q = 0$.

748. Vérifier les formules

$$\operatorname{Tg} a + \cot b = \frac{\cos(a-b)}{\cos a \sin b}$$

$$\sec(a \pm b) = \frac{\sec a \sec b}{1 \mp \operatorname{Tg} a \operatorname{Tg} b}$$

$$\frac{\cot a + \cot b}{\cot a - \cot b} = \frac{\sin(b+a)}{\sin(b-a)}$$

$$\sin 2\varphi \sin 2\varphi' = \sin^2(\varphi+\varphi') - \sin^2(\varphi - \varphi')$$

$$\frac{1+\sin a}{1-\sin b} = \frac{\operatorname{Tg}\left(45^\circ + \frac{a}{2}\right)}{\operatorname{Tg}\left(45^\circ - \frac{a}{2}\right)}$$

$$\operatorname{Tg} a - \cot b = \frac{\cos(a+b)}{\cos a \sin b}$$

$$1 \pm \operatorname{Tg} a \operatorname{Tg} b = \frac{\cos(a \pm b)}{\cos a \cos b}$$

$$\operatorname{Tg} \tfrac{1}{2}(a-b) = \frac{\sin a - \sin b}{\cos a + \cos b}$$

$$\sin(a - 120^\circ) + \sin a + \sin(a + 120^\circ) = 0$$

$$\operatorname{Tg}(a+b)\operatorname{Tg}(a-b) = \frac{\left(\frac{\cos b}{\cos a}\right)^2 - 1}{1 - \left(\frac{\sin b}{\cos a}\right)^2}$$

$$\operatorname{Tg}^2 a - \operatorname{Tg}^2 b = \frac{\cos 2b - \cos 2a}{2\cos^2 a \cos^2 b}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos\tfrac{A}{2}\cos\tfrac{B}{2}\cos\tfrac{C}{2} \\ &\operatorname{Tg} A + \operatorname{Tg} B + \operatorname{Tg} C = \operatorname{Tg} A \operatorname{Tg} B \operatorname{Tg} C \\ &\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A \cos B \cos C = 1 \end{aligned}\right\} A+B+C = 180^\circ$$

$$\operatorname{cosec}(a+b) = \frac{\sec a + \sec b}{\operatorname{Tg} a + \operatorname{Tg} b}$$

$$\frac{\operatorname{Tg} a + \operatorname{Tg} b}{\operatorname{Tg} a - \operatorname{Tg} b} = \frac{\sin(a+b)}{\sin(a-b)}$$

$$\mathrm{Tg}\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{1-\cos a}{\sin a}$$

$$\cos a = \frac{1-\mathrm{Tg}^2\frac{a}{2}}{1+\mathrm{Tg}^2\frac{a}{2}}$$

$$\sin(a+b) \times \sin(a-b) = \cos^2 b - \cos^2 a$$

$$\mathrm{Sec}(a+b) = \frac{\mathrm{Sec}\,a\,\mathrm{Sec}\,b}{1-\mathrm{Tg}\,a\,\mathrm{Tg}\,b}$$

$$\mathrm{Cosec}(a-b) = \frac{\mathrm{Sec}\,a\,\mathrm{Sec}\,b}{1+\mathrm{Tg}\,a\,\mathrm{Tg}\,b}$$

749. Prouver Géométriquement les formules

$$\sin 2a = 2\sin a\cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

$$\mathrm{Tg}(a\pm b) = \frac{\mathrm{Tg}\,a \pm \mathrm{Tg}\,b}{1\mp \mathrm{Tg}\,a\,\mathrm{Tg}\,b}$$

$$\frac{\sin p+\sin q}{\sin p-\sin q} = \frac{\mathrm{Tg}\frac{1}{2}(p+q)}{\mathrm{Tg}\frac{1}{2}(p-q)}$$

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos a}{2}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos a}{2}}$$

750. Résoudre un triangle (avec la discussion, la détermin. du triangle maximum s'il y a lieu, et la construction), connaissant :

$2p$, S, A.

$2p$, A, B.

a, A, $b\pm c$.

$a, A, \frac{b}{c}$.

$2p, b, A = 90°$.

$b+c, h, A = 90°$ (h étant la hauteur de A).

$B, b+c, A = 90°$.

$2p, h+a, A = 90°$

a, A, bc.

$a, C, b+c$.

$a, C, b-c$.

a, h, R.

r, R, h.

m, m', m'' (médianes).

A, B, S.

$a, \frac{B}{C}, A = 90°$.

$a, \frac{b}{c}, A = 90°$.

$S, 2p, A = 90°$

$b, r, A = 90°$.

$a, r, A = 90°$.

$2p, r, A = 90°$

$S, r, A = 90°$.

$r, R, A = 90°$

$a, A, b^2 - c^2$.

$a, B, \frac{b}{c}$.

A, B, r.

A, c, R.

$a, m, A = 90°$

$2p, A, h$.

a, $b \pm c$, $A = 90°$.

a, bc, $A = 90°$.

$A + B$, c, h.

m, α, β (angles de m avec b et c)

a, B, μ (bissectrice de A)

$b - c$, S, A.

2p, $A - B$, a.

R, 2p, a.

a, $b + c$, R.

a, A, h.

2p, A, R.

μ, bc. ?

S, 2p, R.

2p, a, $A = 90°$.

B, $a - c$, $A = 90°$.

B, $a - b$, $A = 90°$.

a, A, S.

b, c, A.

a, A, $\not{p}$ R.

2p, A, B.

751. Résoudre un triangle rectangle inscrit dans un cercle de rayon R, connaissant l'angle au centre correspondant à un côté de l'angle droit.

752. Résoudre un triangle, connaissant un angle, le rayon ρ du cercle inscrit, et les angles que font les côtés comprenant l'angle donné avec les droites menées du centre du cercle inscrit aux deux autres sommets.

753. Résoudre un triangle, connaissant :

h, c, b.

h, a, B.

754. Calculer a, b, c, connaissant R, r et h.

755. Résoudre un triangle, connaissant la base, qui est moyenne arithmétique entre les deux autres côtés. On sait de plus que le sommet du triangle se trouve sur une droite donnée. (Cela se ramène, géométriquement, au problème 719).

756. Dans tout triangle

$$\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot A \cot C = 1$$

757. On donne A, b, c, calculer la bissectrice de A.

758. Trouver trois nombres tels que leur somme soit égale à leur produit. (tg A, tg B, tg C si A+B+C = 180°)

759. On donne A, b, c, calculer la hauteur de A.

" a, B, C, " "

760. On donne a, h, r : trouver b et c.

761. Deux angles d'un triangle étant donnés, calculer son côté de manière qu'il soit équivalent à un carré dont le côté est d.

762. Les formules de Sin(a ± b) et de Cos(a ± b) sont implicitement comprises dans les équations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = \text{--}$$

$$c^2 = \text{---}$$

763. Dans tout triangle rectangle, a, b, c, h sont en proportion géométrique.

La réciproque est-elle vraie ? oui.

764. Trouver, en fonction des 3 côtés, R, r, r', r'', r'''.

765. Si deux droites se coupent à angle droit, le produit des tangentes de leurs inclinaisons sur un axe fixe est égal à −1, et réciproquement.

766. Prouver que

$$S = p^2 \, \mathrm{tg}\frac{A}{2} \, \mathrm{tg}\frac{B}{2} \, \mathrm{tg}\frac{C}{2} .$$

$$r = p \, \mathrm{tg}\frac{A}{2} \, \mathrm{tg}\frac{B}{2} \, \mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

$$R = \frac{2p}{\cos\frac{A}{2} \cos\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}}$$

767. Trouver S, connaissant

A, B, C, R $(S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C)$

A, B, C, r ou r', r'', r'''.

768. On joint les pieds des hauteurs d'un triangle ABC, ce qui donne un triangle A'B'C' dont on demande la surface en fonction de a, b, c.
Même question pour les médianes, pour les bissectrices.

769. Surface d'un triangle en fonction des hauteurs — des bissectrices — des médianes.

769. Aire d'un triangle en fonction d'une médiane et des angles qu'elle fait avec les deux côtés.

770. Surface d'un parallélogramme en fonction de deux côtés et de l'angle compris.
D'un losange, en fonction d'un côté et d'un angle.
D'un trapèze, " des 4 côtés.
D'un quadrilatère " des diagonales et de leur angle.

771. Trouver les angles d'un quadrilatère inscriptible en fonction des 4 côtés. — En déduire les

les diagonales, la surface.

Trouver directement les diagonales, et en déduire les deux principes de Géométrie.

772. Angles d'un trapèze dont on connaît les 4 côtés.

773. Côtés d'un trapèze, connaissant les angles, la surface et le périmètre.

774. Hauteur d'un trapèze, connaissant sa surface, sa grande base, et les inclinaisons sur cette base des côtés non parallèles.

775. Résoudre un quadrilatère inscrit dans un cercle donné, connaissant un côté, et deux angles adjacents à ce côté.

776. Déduire

$$\cot\tfrac{1}{2}A + \cot\tfrac{1}{2}B + \cot\tfrac{1}{2}C = \cot\tfrac{A}{2}\cot\tfrac{B}{2}\cot\tfrac{C}{2}$$

De la surface d'un triangle en fonction des trois côtés.

777. De la formule

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\tfrac{A}{2}\cos\tfrac{B}{2}\cos\tfrac{C}{2}$$

Déduire la surface d'un triangle en fonction des trois côtés.

En effet de $S = \frac{bc}{2}\sin A$ on tire

$$\frac{2S}{abc} = \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{2p}$$
$$= \frac{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}{2p}$$ et, remplaçant…

778. Surface d'un quadrilatère inscrit en fonction des 4 côtés (sans trigonométrie).

779. Trouver $\sin(a+b)$ par le quadrilatère inscrit.

780. $R=1$ étant le rayon du cercle circonscrit à un polygone régulier de n côtés, trouver l'angle A au centre, le côté c du polygone, r, $2p$ et la surface m^2. — Examen de cas particuliers. — appliquer la formule

$S = \frac{nR^2}{2} \times \sin\frac{360}{n}$ aux polygones Réguliers de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15 et 18 côtés. — Trouver en fonction de c le côté du polygone régulier circonscrit d'un même nombre de côtés, et des polyg. inscrit et circonscrit d'un nombre double de côtés.

781. On donne l'angle A d'un triangle isocèle et l'on propose de le déterminer sous la condition qu'en tournant autour de sa Base, il engendre un Solide Equivalent à une Sphère donnée.

782. Couper un prisme triangulaire par un plan de manière que la section soit un triangle Equilatérale. (voir Ritt).

783. Mesure trigonométrique du Secteur Sphérique et du Segment Sphérique.

784. Rayon d'un Segment capable d'un angle donné, et décrit sur une droite donnée.

785. Relation entre les côtés des polygones Réguliers de 5, 6, 10 côtés.

786. Graduation de l'arc dont la longueur équivaut à celle du sinus de 30°.

787. Trouver l'angle du cône minimum circonscrit à une Sphère donnée.

788. Volume d'un Segment Sphérique pris dans une Sphère de Rayon R, connaissant les angles au centre correspondants aux cordes qui sont les diamètres des Bases.

789. On donne dans un cône la surface totale et la hauteur, trouver l'angle au sommet, le côté, et le rayon de la base.

790. Trouver les angles dièdres dans le tétraèdre régulier. — L'angle des diagonales d'un cube.

791. Connaissant les côtés d'un parallélipipède rectangle, trouver ses diagonales et les angles qu'elles forment entre elles et avec les côtés.

792. De tous les triangles inscrits dans le même segment, quel est le maximum ? — On cherchera d'abord le maximum de $\sin a \sin b$, $a+b$ étant une quantité constante.

793. Surface maximum d'un triangle connaissant A, a, R.

794. Partager l'arc a en deux parties telles que $\cos x \cos(a-x) = m$. Valeur max. de m. (x)

795. De tous les triangles de même base et de même périmètre, quel est le maximum ?

796. De tous les triangles isopérimètres, quel est le maximum ?

797. De tous les triangles formés avec deux côtés donnés et l'angle compris pris à volonté, quel est le maximum ? — Vérification géométrique.

798. Valeur de x dans l'Eq.

$$\cos x - 2\sin x - 3\sec x + 12a - 7 = 0$$

pour que a soit maximum.

799. Partager a en deux parties telles que

(x) $\cos x \cos(a-x) = m$, ou $\cos a + \cos(a-2x) = \ldots$
d'où $\cos(a-2x) = 2m - \cos a$
$2m - \cos a < 1$ $m < \cos^2 \frac{a}{2}$: dans le cas
$m = \cos^2 \frac{a}{2}$, $\cos(a-2x) = 1$ $x = \frac{a}{2}$.

$\sin x \sin y = m.$ (Confer : 794).

800. Valeur de x pour que

$$y = \frac{\operatorname{tg} 2x}{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x} = \max. \quad \text{(facile)}.$$

801. Trouver

$$a + b = \text{Const.}$$
$$\sin a + \sin b = \max.$$

802. Trouver

$$x + y = a$$
$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \max.$$

803. Dérivées des lignes trigonométriques.

804

$$x = \lim. \frac{\omega \sin \omega}{\omega \cos \omega - \sin \omega} \quad \text{pour } \omega = 0$$

805. Partager un triangle en deux parties équivalentes par une ligne minima. (cela revient au Probl. suivant).

806. Un angle étant donné, mener une droite minimum qui détermine un triangle d'une surface donnée. (Résolu, 1487).

807. Deux points et une circonf. étant donnés, trouver sur cette circonférence un point tel que la somme des distances aux deux points donnés soit un minimum.

808. La couronne sphérique max. et min., la corde du segment circulaire générateur étant constante.

809. Trouver x

$$\sin x + \cos x = \max.$$

810. (Spéciales).

Trouver

$\sin a = f(\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a)$. $\mathrm{Sec}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Sec}.\,a)$. $\cos\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Tg}\,a)$

$\cos\tfrac{1}{4}a = f(\cos a)$. $\sin\tfrac{1}{4}a = f(\cos a)$. $\mathrm{Tg}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Sec}\,a)$

$\sin\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Tg}\,a)$. $\mathrm{Sec}\,\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Tg}\,a)$. $\cos\tfrac{1}{2}a = f(\mathrm{Tg}\,a)$

$\mathrm{Tg}\,a = f(\sin 2a)$. (cas où $\sin 2a = 0$).

$\sin(2a + \tfrac{1}{2}a) = f(\sin a, \cos a)$. $\cos\tfrac{3}{4}a = f(\cos a)$

$\mathrm{Tg}\,2a = f(\mathrm{Sec}\,3a)$. $\cos 2a = f(\cos 3a)$ {La somme des Racines est nulle).

Relation entre $\mathrm{Sec}\,2a$ et $\mathrm{Tg}\,3a$

" $\sin a + \mathrm{Tg}\,2a$ et $\cos 2a \sin a$: dire à priori quel est le degré de l'équation.

Relation entre $\sin 8x$ et $\cos 12x$.

$\sin 3a = f(\sin 2a)$ $\cos 3a = f(\sin 2a)$ $\sin 2a = f(\mathrm{Tg}\,2a)$

$\mathrm{Tg}\,6a = f(\mathrm{Tg}\,2a)$ $\cot 3a = f(\mathrm{Sec}\,2a)$: cas $\mathrm{Sec}\,2a = \infty$.

Relation entre $\mathrm{Tg}\,a\,\mathrm{Tg}\,2a$ et $\sin a$: vérifier pour le cas où $\mathrm{Tg}\,a\,\mathrm{Tg}\,2a = 1$.

De $\sin 3a = f(\sin a)$ déduire $\cos 3a = f(\cos a)$.

$\sin 12a = f(\cos 8a)$.

Relation entre $\mathrm{Tg}\,2a$ et $\mathrm{Tg}\,3a$: vérifier pour $\mathrm{Tg}\,3a = 0$ et pour $\mathrm{Tg}\,3a = 1$.

Relation entre $\mathrm{Tg}\,2a$ et $\dfrac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a}$.

$\mathrm{Tg}\,3a = f(\mathrm{Tg}\,a)$ $\sin 3a = f(\sin 2a)$ $\cot 3a = f(\cot 4a)$

Relation entre $\cos 2a$ et $\sin 3a$.

$\mathrm{Tg}\,2a = f(\mathrm{Tg}\,3a)$: si $\mathrm{Tg}\,3a = \infty$, trouver $\mathrm{Tg}\,2a$.

$\mathrm{Tg}\,a = f(\mathrm{Tg}\,3a)$ " $\mathrm{Tg}\,a$.

$\sin a + \frac{1}{\cos a} = f(\sin 2a + \operatorname{tg} a)$. $\cos \frac{3}{4} a = f(\cos a)$

$\sin \frac{1}{2} a = f(\cos \frac{1}{3} a)$. $\cos 3a = f(\cos a)$. $\sin \frac{1}{2} a = f(\sin \frac{a}{3})$.

Prouver que la somme des trois racines de $\sin \frac{1}{3} a = f(\sin a)$ est nulle : l'équation peut-elle avoir des racines égales ?

Trouver les racines d'une équation qui ait ses trois racines réelles au moyen de l'équation $\sin \frac{1}{3} a = f(\sin a)$.

Trouver un arc tel que

$\operatorname{tg}^3 a = 3 \operatorname{tg} a$ $\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{tg} a = 0 & a = 0 \\ \operatorname{tg} a = \pm\sqrt{3} & a = 60°, 120°. \end{array} \right.$

$\sin 2a = \frac{1}{2} \sin 3a$ (facile : $\cos a = \frac{1}{2}(1-\sqrt{2})$)

$\sec \frac{a}{3} = f(\sec a)$.

Valeur de $\frac{\operatorname{tg} a + 1}{1 - \operatorname{tg} a \sin a}$ connaissant celle de $\frac{\sin a - \cos a}{1 + \sin 2a}$

$\operatorname{tg} 2a = f(\sin a + \cos a)$.

Trouver une relation entre $\sin 12x$ et $\cos 8x + \cos 4x$.

$\cos 2a = f(\sin 3a)$: cas où $\sin 3a = 1$.

Réduire à un monôme $3 \operatorname{tg} a - 2 \sin 3a$.

La somme des racines de $\cos \frac{1}{3} a = f(\cos a)$ est nulle.

De ce que l'éq. $\cos^3 \frac{a}{3} - \frac{3}{4} \cos \frac{a}{3} - \frac{1}{4} \cos a = 0$ a ses racines réelles, conclure les conditions de réalité de l'équation $x^3 + px + q = 0$.

$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = f(\operatorname{tg} \frac{a}{3})$. — vérifier la formule par les valeurs de $\operatorname{tg} 30°$ et de $\operatorname{tg} 45°$.

$\operatorname{tg} \frac{a}{3} = f(\cos \frac{a}{2})$ $\sin \frac{a}{3} = f(\operatorname{tg} \frac{a}{2})$

$\operatorname{tg} 3a = f(\operatorname{tg} 4a)$ $\cos \frac{3a}{2} = f(\cos a)$

$\cos \frac{3a}{4} = f(\cos a)$ $\sin \frac{a}{4} = f(\cos a)$

Transformer en une somme $\sin a \sin b \sin c$. — cas où $a+b+c = 180°$.

$\operatorname{tg} \frac{a}{3} = f(\operatorname{cosec} a)$: vérifier pour $a = 15°, = 27°$.

Vérifier pour $a = 15^\circ$ et $a = 27^\circ$ les Equations

$$\sin^3\frac{a}{3} - \frac{3}{4}\sin\frac{a}{3} + \frac{1}{4}\sin a = 0$$

$$\cos^3\frac{a}{3} - \frac{3}{4}\cos\frac{a}{3} - \frac{1}{4}\cos a = 0$$

$$Tg^3\frac{a}{3} - 3\,Tga\,Tg^2\frac{a}{3} - 3\,Tg\frac{a}{3} + Tga = 0.$$

$\sin\frac{a}{4} = f(\cos a)$. $\cos\frac{a}{3} = f(\cos a)$: si $\cos a = 0$.

$\sin\frac{a}{3} = f(\sin a)$: si $\sin a = 0$.

Relation entre les cotangentes des trois angles d'un triangle.

811. Démontrer la formule de vérification d'Euler

$$\sin a = \sin(36^\circ + a) + \sin(72^\circ - a) - \sin(36^\circ - a) - \sin(72^\circ + a)$$

et celle de Legendre:

$$\sin(90^\circ - x) + \sin(18^\circ - x) + \sin(18^\circ + x) = \sin(54^\circ - x) + \sin(54^\circ + x).$$

812. Résoudre et construire

$$\sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\sec x = \frac{7}{3}$$

$$\cos x = -\frac{3}{4}$$

$$\mathrm{cosec}\, x = -\frac{9}{5}$$

$$\cot x = -\frac{5}{7}$$

$$Tg x = -\frac{17}{9}$$

$$\cos x = -\sqrt{3}$$

$\sec^2 x - \cot x = \frac{1}{4}$ (Eq. du 3e. degré en Tgx : on trouve en effet $\left\{ \begin{array}{l} 4\sin x - 4\cos^3 x = \sin x \cos^2 x \\ \text{ou } 4\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x) - 4\cos^3 x = \sin x \cos^2 [illegible] \\ \text{Divist. par } \cos^3 x \text{ on a l'Eq. en } Tg [illegible] \\ 4Tg^3 x + 3Tg x - 4 = 0 \end{array} \right.$

$\cot^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4}$ (1490)

$a\sin x + b\cos x = c$

$m\cos^2 x + n\sin^2 x = p$ } facile.

$a\,\mathrm{Tg}\,x + b\,\mathrm{Cot}\,x = c$ (Mult. tout par Tg x : car Cot x Tg x = 1)

$a\,\mathrm{Sin}\,x + b\,\mathrm{Tg}\,x = c$ (à examiner).

$\dfrac{\mathrm{Sin}(a+x)}{\mathrm{Sin}\,x} = m$ (facile).

$m\,\mathrm{Sin}^2 x + n\,\mathrm{Cos}^2 x - p\,\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x = 0$ (facile).

$S = m\,\dfrac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Sin}(a+x)}{\mathrm{Sin}.\pi a}$

$\dfrac{\mathrm{Sin}^2 x}{\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}(a+x)} = m$

$\mathrm{Cos}\,x + a\,\mathrm{Cos}\,x\,\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Sin}\,x = 1$ (1488)

$\mathrm{Tg}\,x + \mathrm{Cot}\,x + \mathrm{Sec}\,x + \mathrm{Cosec}\,x = m$ (1489)

$\dfrac{\mathrm{Sin}(a+x) + \mathrm{Sin}(a-x)}{\mathrm{Sin}(a+x)\,\mathrm{Sin}(a-x)} = m$ (Il suffit de développer).

$\dfrac{\mathrm{Tg}\,x}{(1 + \mathrm{Tg}\,x + \mathrm{Sec}\,x)^2} = m$ (1524)

$\dfrac{\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x}{a} = \dfrac{1 + \mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}\,x}{b}$ (1479)

$\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sec}\,x$ ($x = 45°$)

= $\mathrm{Sin}\,x + \mathrm{Cos}\,x = 2\,\mathrm{Sin}(a+x)$ (1523)

Sol. $a\,\mathrm{Sin}(A-x) + b\,\mathrm{Sin}(B-x) = 0$ (1525)

$\mathrm{Sin}(x+1) - \mathrm{Cos}(x+1) = \mathrm{Sin}\,x$ (1526)

$\mathrm{Sec}\,\dfrac{x}{2} + \mathrm{Cos}\,x = 2$ (1491 – N.H.01)

(x) $A\,\mathrm{Sin}(x+a) - B\,\mathrm{Sin}(x-a) = C\,\mathrm{Sin}\,x$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Tg}\,x\,\mathrm{Tg}\,y = a \\ \mathrm{Tg}\,x\,\mathrm{Tg}\,z = b \\ x + y + z = \pi \end{array}\right\}$$ $\mathrm{Tg}\,x = -\mathrm{Tg}(y+z) = \cdots$ d'où $\mathrm{Tg}^2 x = a + b + ab$

$\mathrm{Cos}\,x + \mathrm{Cot}\,x = 0$ $x = 90°$ $x = 790°$

$\mathrm{Sin}^2 x = \dfrac{4}{5}$.

(x) on trouve, en développant et divisant par Cos x :

$\mathrm{tg}\,x = \dfrac{(A+B)\,\mathrm{Sin}\,a}{C - (A-B)\,\mathrm{Cos}\,a}$

d'où

$\mathrm{Tg}(90 - x) = \dfrac{C + (B-A)\,\mathrm{Cos}\,a}{(A+B)\,\mathrm{Sin}\,a}$

et, d'après (820)

$\mathrm{Tg}\left(90 - x + \dfrac{a}{2}\right) = $ —— (faux).

$$a\,\text{Sec}^2 x + 3\,\text{Sec}\,x - R = 0 \quad (\text{Cas où } R = 0)$$

$$a\,\text{Tg}\,x + b\,\text{Cot}\,x = c$$

$$a\,\text{Sin}\,x + b\,\text{Tg}\,x = c$$

$$\begin{cases} \text{Sin}\,a + \text{Sin}\,b = m \\ \text{Sin}\,a\,\text{Sin}\,b = n \end{cases}$$

$$\text{Tg}\,a\,\text{Tg}\,x = \text{Tg}^2(a+x) - \text{Tg}^2(a-x)$$

$$\begin{cases} x + y = A \\ \text{Tg}\,x + \text{Tg}\,y = m \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} y\,(\text{Sin}\,x - \text{Cos}\,x) = a \\ 2x = 90° - b \end{cases}\right\} (\text{très-facile}).$$

$$\begin{cases} y \cdot \dfrac{\text{Sin}\,\beta + \text{Cos}\left(x+\frac{1}{2}\beta\right) + \text{Cos}\left(x-\frac{1}{2}\beta\right)}{\text{Sin}\,\beta} = c \\[2ex] y^2 \cdot \dfrac{\text{Cos}\left(x+\frac{1}{2}\beta\right)\,\text{Cos}\left(x-\frac{1}{2}\beta\right)}{\text{Sin}\,\beta} = 2f \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + \text{Cos}\,2x + \text{Sin}\,2x)\,\text{Sin}\,2y + (\text{Cos}\,x + \text{Sin}\,x)\,\text{Cos}\,2y = 0 \\ 2\,(\text{Cos}\,2x - \text{Sin}\,2x)\,\text{Sin}\,y + (\text{Cos}\,x - \text{Sin}\,x)\,\text{Cos}\,y = 0 \end{cases}$$

813. Trouver le Sinus et le Cosinus de l'arc dont la tangente est $-\frac{3}{4}$, ou $\frac{3}{5}$.

814. On a $a\,\text{Sin}\,x = b\,\text{Sin}(\omega - x)$. Trouver x par Logarithmes.

On trouve immédt. $\text{Tg}\,x = \dfrac{b\,\text{Sin}\,\omega}{a + b\,\text{Cos}\,\omega}$, d'où $\cot x = \text{Tg}(90° - x) = \dfrac{a + b\,\text{Cos}\,\omega}{b\,\text{Sin}\,\omega}$, et par suite, $\text{Tg}\left(90° - x + \frac{\omega}{2}\right) = \dfrac{b+a}{b-a}\cot\frac{\omega}{2}$ d'après 81[illegible]

815. On donne $\text{Sec}\,a = b$, trouver $\text{Tg}\,\frac{a}{2} = x$

" $\text{Sin}\,\frac{x}{2} = \text{arc}\,\text{Sin}\,\frac{1}{2}$,	" $\text{Log}\,\text{Sin}\,x = X$
" $\text{Cos}\,3a = b$	" $\text{Tg}\,2a = x$
" $\text{Tg}\,a = b$	" $\text{Sin}\,\frac{a}{2} = x$
" $\text{Cos}\,2a = b$	" $\text{Tg}\,\frac{a}{3} = x$

816. On donne

$$tg\,a \, tg\,b = 2$$
$$\sin(a+b) = m$$

Trouver $\sin a$ et $\sin b$. (Un peu long, mais facile).

817. $\sin a$ étant donné, trouver $\sin \frac{2a}{3}$. Supposer ensuite que $\sin a = \pm 1$.

818. On a $\sin a = b$, trouver $\cos \frac{2}{3} a = x$. Supposer ensuite que $\sin a = \pm 1$.

819. On a $\cos 3a = b$, trouver $\cos 2a = x$.

820. Connaissant $tg\,x = \dfrac{a + b \cos \alpha}{b \sin \alpha}$ calculer $tg\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$ (1522)

821. Eliminer a entre

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \text{cosec}\, a - \sin a \\ n = \sec a - \cos a \end{array} \right. \quad (1492).$$

822. Eliminer x et y entre les 3 Eq.

$$\left\{ \begin{array}{l} a \sin^2 x + b \cos^2 x = m \\ b \sin^2 y + a \cos^2 y = n \\ a\, tg\, x = b\, tg\, y \end{array} \right\} \quad (1493)$$

823. Eliminer φ entre

$$\left\{ \begin{array}{l} x = R(\varphi - \sin \varphi) \\ y = R(1 - \cos \varphi) \end{array} \right\} \quad (1521)$$

824. On donne : $tg\, 5a = m$, trouver $tg\, 3a = x$

" $tg\, 4a = m$ " $\cot 3a = x$

" $\sin 3a = m$ " $\sin 2a = x$

825. On donne $tg\, 3a = x$, trouver $tg\, 2a = y$. Faire voir à priori que l'Eq. Résultante devait être du 3e. degré. Vérifier les coefficients de cette

Equation par les hypothèses $\text{tg}\,3a = 1$, $\text{tg}\,a = \infty$, $\text{tg}\,3a = \sqrt{3}$.

826. On donne $\sin a = b$, trouver $\sin \frac{2a}{3} = x$.

827. Soit un triangle ACB. Par A je mène une droite AX. Je projette C en C', et B en B'.

on a
$CAX = 48° \ 37' \ 20''$
$BAX = 15° \ 19' \ 40''$
$AB' = 49,342$
$AC' = 37,454$

Trouver $BC = x$.

828. Surface d'un trapèze dont on connaît les 4 côtés.

829. Trouver la différence de niveau d'un point accessible et d'un point inaccessible.

830. Différence des hauteurs de deux montagnes inaccessibles.

831. Hauteur d'une montagne d'après la distance limite de l'horizon de la mer.

832. Reconnaître si 3 points inaccessibles sont sur une droite

833. Idem un " 4 " angle à l'horizon. " " circ.

834. Rayon d'un bassin circulaire inaccessible.

835. A quelle hauteur faut-il s'élever au dessus de la surface de la terre pour apercevoir un horizon de 84 myriamètres ?

836. Deux propriétés sont séparées par une ligne brisée ABC, et sont limitées par deux chemins rectilignes AX, CY. Déterminer l'angle DAX que devrait faire avec l'un des chemins AX une droite partant de l'extrémité A de la ligne brisée, et qui partagerait le terrain de la même manière.

(Voir la figure).

837. On veut percer une Route DA à travers un bois O situé entre deux points D et A. Pour y parvenir, on mesure les angles B et C, et les côtés AB, BC, CD. Déterminer les angles DAB et ADB qui indiquent la direction que la Route doit prendre des deux côtés.

838. Hauteur d'une tour donnant 120^m d'ombre, la hauteur du ☉ étant de 36°.

839. Dans un lieu élevé de 10^m,7, on a trouvé 5' 50" de dépression. à quelle distance peut-on apercevoir les objets à l'horizon?

840. La hauteur d'un nuage a été observée de a°, celle du Soleil, situé dans la même direction, de b°. La distance de l'ombre du nuage à l'observateur mesurait c mètres. Trouver la hauteur du nuage.

841. En m'avançant vers un fort, je mesure l'angle d'élévation du sommet, et je le trouve de 2° 56' 39". après avoir fait 1 Kilom. de chemin, je le trouve de 5° 27' 20". Combien de Kil. me reste-t-il à parcourir pour atteindre le fort?

---

842. Trouver deux nombres entiers consécutifs, connaissant la différence de leurs carrés et celle de leurs cubes.

843. Démontrer que l'on a

$$\sqrt{a+b} - \sqrt{a} < \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

844. Le carré d'un nombre premier, diminué d'une unité, est divisible par 12 (exc. 2 et 3).

845. Si a et b sont premiers entre eux, 3 est le seul facteur premier qui puisse être commun à $a+b$ et a^2-ab+b^2.

846. Si A est un nombre entier :

$$A(A+1)(2A+1) = m.\ 6.$$

847. Trouver le P. G. C. D. de deux fractions.

848. A et B étant premiers entre eux :

$$AB(A^2+B^2)(A^2-B^2) = m.\ 30.$$

849. Un polygone circonscrit d'un nombre de côtés donné a-t-il une surface minima quand il est régulier ?

850. Trouver en nombres entiers les côtés d'un rectangle dont la surface renferme 2 fois autant de mètres carrés que le périmètre contient de mètres.

851. Trouver en nombres entiers les côtés d'un parallélipipède rectangle à base carrée dont le volume renferme 5 fois autant de mètres cubes que sa surface totale contient de mètres carrés.

Problèmes d'arithmétique.

(Briot).

Multiplication et division.

852. on sait que le son parcourt 340m. par seconde. le bruit du tonnerre a été entendu 27 sec. après l'apparition de l'éclair. on demande à quelle distance est situé le nuage orageux.

853. combien y a-t-il de minutes et de secondes dans un jour? dans 8h. 22m. 16s ?

854. la circonf. de la terre contient 360°. et chaque degré vaut 25 lieues communes ou 20 lieues marines. on demande combien il y a de lieues de l'une et l'autre espèce dans le tour de la terre.

855. le soleil est 1384500 fois plus gros que la terre, tandis que la lune est 80 fois plus petite que la terre. combien de fois le soleil est-il plus gros que la lune?

856. le rayon du globe terrestre est 1450 lieues. la distance du Θ à la ☾ est de 24000 r. quelle est la distance en lieues?

857. on a payé 60172 fr. un convoi de marchandises pesant brut 1535 kil. on sait que l'emballage est la 5e. partie du poids total. à combien revient le kil. de marchandise?

858. combien y a-t-il de minutes et d'heures dans 22056s ?

859. combien faudra-t-il de temps à une fontaine donnant 15 litres d'eau par minute pour remplir un bassin d'une capacité de 22645 litres?

860. quel temps faudrait-il pour faire le tour de la terre, si l'on pouvait marcher sans cesse en faisant 1 lieue par h.? — 375 jours.

861. deux voyageurs vont à la rencontre l'un de l'autre. ils sont actuellement distants de 20704m. le premier

fait 12^m. par minute, le second en fait 10. on demande 1°. après combien de temps les deux voyageurs se rencontreront, 2°. à quelle distance ils seront alors des points de départ.

862. La distance de la Lune à la Terre est 60 r et $r = 6366500^m$. on demande combien de temps mettrait le son, qui parcourt 340^m par seconde, pour venir de la Lune à la Terre? — 13 j. 5^m

863. La lumière parcourt 70000 lieues par seconde. à quelle distance de la Terre serait situé un astre dont la lumière emploierait un jour pour venir jusqu'à nous?

Problèmes divers.

864. on veut échanger 50^m. d'un drap qui vaut 12^f,75 le mètre contre de la soie qui vaut 8^f,50 le mètre. quelle quantité de soie doit-on recevoir en échange?

865. une locomotive qui fait 6 lieues à l'heure, a employé 10 h. pour parcourir une certaine distance. combien d'heures emploierait-elle pour franchir la même distance si elle faisait 8 lieues à l'heure?

866. Une fontaine a mis 2^h 52^m 46^s à remplir un bassin de 7^{mc}. 46$^{décim.c.}$ combien de temps mettrait-elle pour remplir un bassin de 12^{mc}. 620$^{dec.c.}$

867. Il faut 10 quintaux de foin pour nourrir 8 chevaux pendant 15 jours. combien en faudra-t-il pour nourrir 13 chevaux pendant 20 jours?

868. avec 28^k,5 de fil, on a fabriqué une pièce de toile ayant 120^m. de longueur sur 1^m,25 de large. combien de m. d'une toile semblable à la première, mais ayant 0,92 de largeur, pourrait-on fabriquer avec 40 kil. de fil?

869. Un arrondissement, composé de 4 cantons, doit fournir à la conscription un contingent de 162 soldats. Les populations de ces 4 cantons sont

30100 hab.   28300   15200   7400.

répartir le contingent entre les divers cantons d'après la population.

La population totale de l'arrondissement est 81000 hab. ce qui fait 1 soldat par $\frac{81000}{162}$ ou par 500 hab. — on trouve donc que chaque canton doit fournir autant de soldats qu'il contient de fois 500 hab. c. a d.

60, 2
56, 6
30, 4
14, 8

Mais il faut des nombres entiers.
J'attribue d'abord

60 h. au 1er
56 " 2e
30 " 3e
14 " 4e

il reste deux hommes : qu'il s'agit d'attribuer à deux des 4 cantons.

on pourrait croire au premier abord qu'il faut prendre en excès les deux nombres 56,6 et 14,8 qui renferment les fractions les plus fortes, ce qui ferait 57 soldats pour le 2e canton, et 15 pour le 4e. Mais on se tromperait en agissant ainsi. Car il ne faut pas considérer seulement la valeur absolue de l'augmentation du nombre fractionnaire, il faut encore comparer cette augmentation au nombre d'habitants.

Je prends en excès les 4 nombres fractionnaires. — En prenant 61 pour le 1er canton, l'augmentation absolue serait 0,8, ce qui fait par habitant une augmentation relative de $\frac{0,8}{30100}$ = 0,00026.
on trouve ainsi:

1er canton	augmentation relative	0,00026
2e "	" "	0,00014
3e "	" "	0,00039
4e "	" "	0,00027

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

On voit que les deux augmentations relatives les plus petites sont celles du 1er et du 2e canton. — La meilleure répartition est donc de demander 61 soldats au 1er canton, 57 au 2e, 30 au 3e et 14 au 4e.

870. La loi admet une tolérance des 3 millièmes du poids pour les pièces de 5 fr., des 5 mill. pour les pièces de 1 et 2 fr. des 7 mill. pour celles de 50 cent. et des 10 mill. pour celles de 20 cent. — On demande à quelle valeur s'élève la tolérance du poids sur les différentes pièces d'argent.

871. Il y a aussi une tolérance de deux millièmes sur le poids des pièces d'or. Quelle est la tolérance des poids ?

872. Il y a encore une tolérance du titre de 0,003 pour l'argent, et de 0,002 pour l'or.
On demande quelle est la plus grande et la plus petite valeur que puissent avoir les pièces d'or et d'argent en tenant compte de la tolérance du poids et du titre.

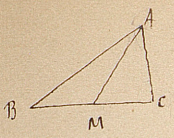
---

873. Trouver les triangles rectangles dont les côtés soient entiers, et dont la surface renferme le même nombre de mètres carrés que le périmètre contient de mètres.

874. Trouver en nombres entiers les côtés des triangles isocèles dont la surface soit un multiple entier de la base.

875. Dans tout quadrilatère, la somme de deux côtés opposés est plus petite que la somme des diagonales, et celle-ci est plus petite que le périmètre. } Très facile, 1er Livre, Géom.

876. Dans un triangle, une médiane est < la ½ somme des deux côtés opposés, et la somme des médianes est moindre que le périmètre. } id. id.



877. Si l'on mène la médiane AM, l'angle BAC sera droit, aigu ou obtus selon qu'on aura AM = BM, AM > BM ou AM < BM. (Très-facile).

facile.

878. Démontrer que l'aire d'un trapèze a pour mesure le produit d'un des côtés non parallèles par la $\frac{1}{2}$ somme des perpendiculaires abaissées sur ce côté des sommets opposés.

879. Construire un triangle connaissant la différence des angles à la base et les deux autres côtés. (voir 1480)

880. On donne un cercle et un de ses diamètres divisé arbitrairement en deux parties. On décrit sur les deux parties comme diamètres deux demi-circonférences, l'une en dessus, l'autre en dessous. — Démontrer que la courbe formée par ces deux demi-circonférences divise la surface du cercle en deux parties proportionnelles aux segments du diamètre. (facile).

facile.

881. Par un point donné mener à une circonférence donnée une sécante telle que la partie interceptée soit la moitié, ou en général, la m^e partie de la sécante entière.

882. Sachant que, de toutes les figures qui ont même périmètre, le cercle a la plus grande surface, démontrer que, de tous les quadrilatères formés avec quatre côtés donnés, le quadrilatère inscrit est maximum. (V. 1481).

Géom.

$\cos\alpha = \frac{1}{3}$ — 883. Trouver l'angle dièdre d'un tétraèdre régulier.

Résolu, 1531
Compr. 921.

884. On donne un diamètre, une demi-circonférence, et une ordonnée au diamètre. Décrire une circf. tangente au diamètre, à l'ordonnée, et à la demi-circonférence.

885. Construire un triangle, connaissant le rayon

304

du cercle inscrit, un côté, et la somme ou la différence des deux autres côtés.

886. Si, du milieu d'un arc, on mène deux sécantes quelconques, les points de rencontre de ces sécantes avec la corde de l'arc et avec le cercle sont sur une même circonférence. } facile.

887. Calculer la valeur de la ligne qui joint les milieux des diagonales d'un trapèze. } id. c'est la ½ différ. des bases.

888. Dans un trapèze, la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés non parallèles, plus deux fois le rectangle des bases.

889. Etant données une cf. et une droite, trouver sur la circf. un point tel qu'en le joignant aux deux extrémités de la droite, la corde comprise soit parallèle à la droite.

890. Inscrire un carré et un octogone avec un compas seulement.

891. Tout rectangle circonscrit à un carré est un carré. facile.

892. D'une des extrémités d'un diamètre, mener une sécante telle que la partie comprise entre le cercle et la tangente menée par l'autre extrémité du diamètre soit égale à une ligne donnée. id.

893. On donne une circonférence, un diamètre, et une corde perp. au diamètre. On prend un point qcq. sur la circonférence. On le joint aux extrémités de la corde et à celles du diamètre. On projette les deux dernières lignes de jonction sur une qcq. des deux autres. Démontrer que, dans les deux cas, la somme et la différence des projections sont respectivement égales aux droites qui

joignent le point aux extrémités de la corde.

894. Etant donnés une circonférence, une droite, et un point, mener par ce point une droite telle que si, par son intersection avec la droite donnée, on mène une tangente au cercle, ces deux droites soient également inclinées sur la droite donnée. (on mène par le symétrique du point une tang. à la circf.).

facile. (Lieux géom.) 895. Construire un triangle, connaissant la base, la médiane qui y aboutit, et le rapport des deux autres côtés.

facile. — Bon exercice de partages proportionnels. 896. Etant donnés trois points, mener par un d'eux une droite dont les distances aux deux autres soient :: m : n.

897. Trouver le lieu des centres de gravité des triangles ayant même base et même hauteur, ou ayant même base et même angle au sommet. (facile et gentil).

Résolu, n°. 1492 ...... 898. Trouver la mesure du tronc de parallélipipède.

facile. 899. Mener par un des points de rencontre de deux circonférences une sécante telle que les cordes interceptées soient dans le rapport de m à n.

id. 900. Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une parallèle à la base. — un trapèze.

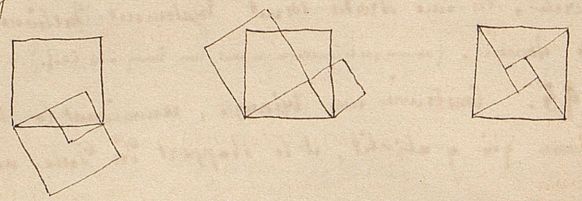
id. 901. Partager un triangle en deux parties équivalentes par une perp. à la base.

très-facile. 902. Si par un point pris dans l'intérieur d'un triangle, on abaisse des perp. sur les 3 côtés, la somme des carrés de 3 segments non consécutifs est égale à la somme des carrés des trois autres.

903. Etant donné un triangle équilatéral inscrit, on prend un point sur la circonférence, et on le

joint aux trois sommets. La somme des distances de ce point aux deux sommets voisins est égale à la distance du même point au sommet opposé. C'est une conséq. immédiate de ce que, dans un quadrilatère inscrit, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.

904. Démontrer le carré de l'hypoténuse sur l'une des figures suivantes



905. Etant donné un angle et un point sur un côté, trouver sur le même côté un point tel que si l'on abaisse de ce point une perp. sur l'autre côté, la perp. soit égale à la distance du point donné au point cherché. Facile.

906. Dans deux divisions, le diviseur est le même. On divise par lui la somme des dividendes. Dans quel cas le quotient sera-t-il la somme des parties entières des deux premiers? id.

907. On diminue d'une unité le diviseur d'une division. Trouver la condition nécessaire pour que la partie entière du quotient ne change pas.

908. La surface courbe du cyl. circonscrit à la sphère est égale à celle de la sphère. Connu et facile.

909. Construire un triangle connaissant un côté, l'angle opposé et sa bissectrice.

910. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle mener une transversale de longueur donnée.

C'est le même problème.

facile en achevant le parallélogramme.

911. Construire un triangle, connaissant 2 côtés et la médiane qui part de leur intersection.

912. Circonscrire un trapèze à un cercle, connaissant deux quelconques de ses côtés.

913. Construire un trapèze connaissant les angles et les diagonales.

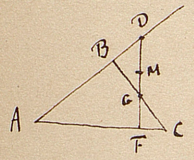
914. Trouver sur une circonférence un point tel que la somme de ses distances à deux points donnés soit un minimum.

Géom. analytique.

915. Étant donné un triangle isocèle, trouver le lieu des points tels que leur distance à la base soit moyenne proportionnelle entre leurs distances aux deux autres côtés.

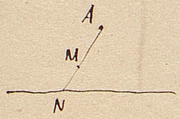
916. ABC étant rectangle en B, trouver le lieu des points M tels que

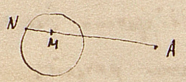
$$MF^2 = FG \times FD.$$



917. Trouver (par la Géom. anal.) le lieu des points tels que la somme ou la différence des carrés de leurs distances à deux points donnés = const.

918. A étant fixe, et N qcq. Trouver le lieu des points M par la condition





$$AM \cdot AN = a^2.$$

919. Trouver le lieu des points d'où deux cercles sont vus sous le même angle (Circ.) (Immédiat : 2 tr. s.)

920. Trouver le lieu des points tels que la somme des carrés des tangentes menées par ces points à deux

circonférences soit constante (. Circ.).

921. on donne un demi-cercle et une ordonnée au diamètre. on décrit sur les deux segments du diam. deux demi-circonf. Puis on décrit deux cercles tangents à l'ordonnée, aux demi-cercles decrits, et à à la demi-circ. donnée. Ces deux cercles ont même rayon (Difficile). Résolu, n°. 1527. Compr. 884.

922. dans un polygone inscrit de 22 côtés, la somme des angles de rang pair est égale à la somme " " " impair.

923. Un polygone inscrit d'un nombre de côtés donné est minimum quand il est régulier.

924. Etant donné une droite et trois points sur cette droite, décrire 3 cercles tangents à la droite en ces points et tangents 2 à 2 (Diff.) (facile par le calcul).

925. combien un polygone de n côtés a-t-il de diagonales ?

926. Maximum du nombre de termes du carré d'un polynome de n termes.

927. on écrit la suite des nombres impairs. on les partage en tranches de 1, 2, 3, 4 .. nombres. démontrer que l'on a ainsi les cubes des nombres entiers consécutifs.

928. on écrit la suite de tous les nombres et celle des nombres impairs. démontrer que la différence des carrés de deux nombres correspondants est un carré parfait.

facile.

929. Trouver x, y, z, v

$$\begin{cases} x + v = a \\ y + z = b \\ x^4 + y^4 + z^4 + v^4 = m^4 \\ x : y :: z : v \end{cases}$$

930. Résoudre

$$\begin{cases} x : y :: z : v \\ x + z = a \\ y + v = b \\ xyzv = m^4 \end{cases}$$

931. Résoudre

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^4 + y^4 = b^4 \end{cases}$$

932. Résoudre

$$\begin{cases} x . y : z . v \\ x + y + z + v = a \\ x^2 + y^2 + z^2 + v^2 = b^2 \end{cases}$$

933. Résoudre

$$\begin{cases} \div x : y : z : v : w \\ x + z + w = a \\ y + v = b \end{cases}$$

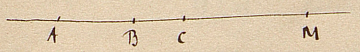
934. Trouver de combien de manières n personnes peuvent s'arranger autour d'une table ronde.

935. Le produit de m nombres consécutifs est toujours divisible par le produit des m premiers nombres.

936. On a

$$\frac{a+b+c+\cdots+n}{m} > \sqrt[m]{abc\ldots n}$$

937. Étant donnés A, B, C, trouver M de telle façon que MA soit l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont MB et MC seraient les deux autres côtés.



Discuter et construire.

938. On écrit la suite

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad \ldots$$

dans laquelle chaque terme est la somme des deux précédents. Prouver que la différence entre le carré d'un terme et le produit des deux qui le comprennent est égal à 1 en valeur absolue.

939. On a l'éq.

$$x^2 - x + a = 0$$

Trouver a par la condition

$$x'^2 + x''^2 = 5.$$

940. Résoudre

$$ax^2 + bx + c = 0$$

par l'évanouissement du 2d. terme.

941. Relations entre p et q (de $x^2+px+q=0$) pour que l'une des racines surpasse l'autre de α, ou bien pour que

$$\frac{x'}{x''} + \frac{x''}{x'} = \alpha$$

ou bien pour que

$$x' = \alpha x''$$

942. Partager a en deux parties :

$$a = x + y$$

avec

$$x^3 + y^3 = \text{max. ou min.}$$ facile.

943. Deux personnes ont un revenu égal. La première en épargne chaque année $\frac{1}{5}$: et la 2de. qui dépense 600 fr. de plus que la 1ère. par an, doit, au bout de 3 ans, 1140 fr. Quel est leur revenu.

944. Démontrer que, si l'on pose

$$p = \cfrac{a}{a + \cfrac{b}{b + \cfrac{c}{c + \cfrac{d}{d + \ldots}}}} \qquad q = \cfrac{a}{b + \cfrac{b}{c + \cfrac{c}{d + \cfrac{d}{e + \ldots}}}}$$

on aura

$$q+a = p\,(q+a+1)$$

945. Démontrer que l'on a

$$x^n + \frac{1}{x^n} = \left(x+\frac{1}{x}\right)^n - n\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-4} - \frac{(n)(n-4)(n-5)}{1.2.3}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-6} + \cdots$$

$$+ (-1)^p \frac{n(n-p-1)(n-p-2)\cdots(n-2p+1)}{1.2\ldots\ldots p}\left(x+\frac{1}{x}\right)^{n-2p} + \cdots$$

946. Vérifier l'égalité

$$a+b = a-b + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \cfrac{4ab}{2(a-b) + \text{etc.}}}}$$

Calculer les Réduites Successives.

947. Transformer en fraction continue

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

on aura

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \text{etc.}}}}}}$$

948. vérifier

$$x = \frac{\left(\frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x^2+2x+1}{x+1} - \frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(x^3+2x^2+x+\sqrt{\frac{x^7-14x^5+12x^4+17x^3+4x^2}{x+4}}\right)}{3x^2+7x+1-\sqrt{9x^4-6x^3+7x^2-2x+1}}$$

949. Calculer l'expression

$$\sqrt{(x^5+x^3-2x)\left\{\left(\frac{x^2-2x}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x^3+2x^2-1}{x^2+2} + \frac{x^2+3}{x}\right) + \frac{x^5+x^4-2x^3-3x^2+4x-54}{x^2+x} + \frac{55x^2+19x+123}{x(x^2-1)(x^2+2)}\right\}}$$

950. Éliminer a, b, c entre les équations

facile.
$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{x}{a}\right)^9 + \left(\frac{y}{b}\right)^9 + \left(\frac{z}{c}\right)^9 = 1 \\ a^{18} + b^{18} + c^{18} = d^{18} \\ \frac{x^9}{a^{27}} = \frac{y^9}{b^{27}} = \frac{z^9}{c^{27}} \end{array}\right.$$

on doit trouver
$$x^6 + y^6 + z^6 = d^6.$$

951. Calculer la différence de niveau entre deux points inaccessibles.

952. Étant donné les côtés d'un quadrilatère inscrit, trouver les diagonales et la surface.

953. Résoudre l'éq.
$$\sin x + \cos x = \sec x. \quad (x = 45^\circ)$$

954. Résoudre
$$a = x + y$$
$$\sin x \sin y = \max.$$

955. Résoudre
$$\cot^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4} \qquad (1490)$$

956. On donne dans un quadrilatère circonscrit les angles et le rayon du cercle inscrit : calculer les côtés, le périmètre et la surface. Très facile.

957. Dans un triangle isocèle, la base est égale au double produit d'un des côtés égaux par le sinus de la moitié de l'angle au sommet. — En déduire l'inscription d'un polygone régulier de m côtés. — Calculer le côté du polygone rég. semblable circonscrit.

958. Trouver la surface d'un triangle, connaissant les angles, et le rayon du cercle circonscrit, ou celui du cercle inscrit : en déduire le rapport de ces deux rayons.

959. Résoudre l'équation

$$\cot^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4} \quad (1490)$$

960. On marque sur une droite indéfinie XY, à partir d'un point O, une série de points distants les uns des autres d'une longueur a ; puis une autre série de points distants d'une longueur b. a et b peuvent être premiers ou non. Déterminer le rang des points de la première série qui coïncident avec ceux de la seconde. — Dans le cas où a et b sont premiers entre eux, trouver deux points appartenant aux deux séries, et qui soient à une distance d l'un de l'autre.

961. On considère le produit

$$1(1+x)(1+2x)(1+3x)\ldots(1+nx)$$

On propose de former une table comme le triangle arithmétique de Pascal, au moyen de laquelle on puisse calculer les coefficients des différentes puissances de x dans le développement de ce produit, pour les valeurs successives de n : 0, 1, 2, 3, ... &c.

962. Résoudre

$$\left(\sqrt[7]{a^c}\right)^x = b^{cx-4a}.$$

963. Résoudre

$$a^{2x} = a\sqrt[3]{a^{2b}}\left(\frac{4}{\sqrt{ab}}\right)^{x^2}$$

964 Résoudre

$$\left\{\begin{array}{l} y^x = x^y \\ y^p = x^q \end{array}\right\} \text{facile.}$$

965. Entre deux points A et B, il existe une route de longueur L : les frais d'entretien sont de $a^{fr.}$ par an et par mètre. On remplace cette route par une autre plus petite de longueur l : La construction de cette route a exigé la dépense de $c^{fr.}$ Les frais d'entretien sont $b^{fr.}$ par an et par mètre. On demande quand il arrivera que les frais de la dépense résultant de l'établissement de la nouvelle route, sera compensée par l'Economie qu'on fait sur l'entretien.

966. Résoudre

$$127^x + 127^{x-3} = 84316$$

967. La circonf. de rayon 1 étant divisée en 30 parties égales, trouver les longueurs des droites qui joignent l'un des points de division à tous les autres.

968. Démontrer qu'on a, quels que soient les arcs a, b, c :

$$\sin a + \sin b + \sin c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\left\{\cos\frac{3a-b-c-\pi}{4} + \cos\frac{3b-a-c-\pi}{4} + \cos\ldots + \cos\ldots\right\}$$

969. Sommer Voir pour ces sommes, n° 1483.

$$\sin a \sin b + \sin 2a \sin 2b + \cdots + \sin na \sin nb$$

et

$$\cos a \cos b + \cos 2a \cos 2b + \cdots + \cos na \cos nb$$

970. Sommer

$$\sin a \cos b + \sin 2a \cos 2b + \cdots + \sin na \cos nb$$

971. Sommer

$$\sin(a+\alpha)\cos(b+\beta) + \sin(2a+\alpha)\cos(2b+\beta) + \cdots + \sin(na+\alpha)\cos(nb+\beta)$$

971. Sommer

$$\cos^2 a + \cos^2(a+b) + \cos^2(a+2b) + \cdots + \cos^2(a+\overline{n-1}\,b)$$

$$\sin^2 a + \sin^2(a+b) + \sin^2(a+2b) + \cdots + \sin^2(a+\overline{n-1}\,b)$$

972. Parmi tous les parallélipipèdes rectangles dont les côtés forment une progression par différence, et dont la surface est égale à $2a^2$, quel est celui qui a la plus grande diagonale ?

973. Dans tout triangle, le centre du cercle inscrit, le centre du cercle inscrit au triangle formé en joignant les milieux des côtés, et le centre de gravité commun aux deux triangles sont en ligne droite.

974. On appelle 2δ l'excès sphérique, et

$$\Delta = \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}$$

Démontrer que l'on a

$$\cot.\delta = \frac{\cos C + \cot\frac{a}{2}\cot.\frac{b}{2}}{\sin C} = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\Delta}$$

$$\sin\delta = \frac{\Delta}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$\cos\delta = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}} = \frac{\cos^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{b}{2}+\cos^2\frac{c}{2}-1}{2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

$$\operatorname{Tg}\frac{\delta}{2} = \frac{1-\cos^2\frac{a}{2}-\cos^2\frac{b}{2}-\cos^2\frac{c}{2}+2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\Delta}$$

$$= \sqrt{\operatorname{Tg}\frac{p}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-c}{2}}$$

975. Calculer en fonction des côtés d'un triangle sphérique les rayons des cercles inscrit et circonscrit, et le pôle de ce triangle.

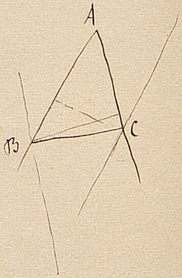
976. Les bissectrices des angles d'un quadrilatère en forment un inscriptible. — Si le 1er est un parallélogramme, le 2e est un rectangle, dont les diagonales sont parallèles aux

côté du parallélogramme, et égale à la différence des côtés adjacents. Si le 1er est un rectangle, le 2e est un carré.

977. On élève une perp. sur la base d'un triangle isocèle, et d'un point de cette perp. on abaisse des perp. sur les autres côtés. Leur différence ou leur somme est égale à la perp. abaissée du point de rencontre de la 1re perp. avec l'un des côtés égaux, sur l'autre côté égal.

978. Construire un trapèze connaissant ses quatre côtés.

979. Construire un triangle, connaissant A et les deux hauteurs de B et de C. facile, voir la fig.



980. Quand trois cercles sont tangents deux à deux, les 3 tangentes communes intérieures se coupent en un même point.

981. Dans un même cercle ou dans des cercles égaux, des triangles équiangles entre eux sont aussi équilatéraux entre eux.

982. - Etant données les longueurs des trois arêtes d'un tétraèdre qui aboutissent à un même sommet, et les angles qu'elles forment entre elles, trouver le volume du tétraèdre.

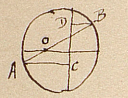
983. - Trouver le volume d'un tétraèdre, connaissant ses six arêtes.

984. Trouver le dièdre de chacun des polyèdres réguliers.

985. Etant donné le côté d'un des cinq polyèdres réguliers, trouver le rayon de la sphère circonscrite.

986. Calculer les diagonales d'un parallélipipède oblique,

et vérifier sur les formules que la somme des carrés des diagonales est égale à celle des carrés des arêtes.



987. On donne un cercle, et un point O sur un diamètre. Trouver une droite perp. au diamètre, et telle qu'en menant par le point O une sécante qui coupe le cercle en A et B, et désignant par p et q les distances AC et BD, la somme $\frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ soit indépendante de la direction de la sécante AB.

988. Trouver l'angle que font entre elles la médiane et la hauteur d'un triangle rectangle.

989. Démontrer que, dans un quadrilatère sphérique dont les côtés opposés sont égaux, les angles opposés le sont aussi, et les diagonales se coupent en parties égales.

990. Etant donnés les deux côtés de ce quadrilatère et l'un des angles, calculer l'autre angle.

Appliquer la formule au cas où tous les côtés sont égaux, et dans cette hypothèse, trouver les diagonales, et la distance de leur point de rencontre aux côtés.

991. Etant donnée la suite indéfinie

$$\frac{1}{1.5} + \frac{6}{5.9} + \frac{15}{9.13} + \frac{28}{13.17} + \frac{45}{17.21} + \cdots$$

où les dénominateurs sont les produits de deux facteurs différant toujours de 4, et où le 1er facteur du dénom. est toujours le même que le dernier du dén. précédent, enfin, où les numérateurs sont égaux à la somme des numérateurs précédents et du dernier facteur du dénominateur précédent, — trouver le terme de rang n, la somme des n premiers termes. Voir si la série est convergente, et si elle l'est quand on alterne les signes.

992. Trouver les dérivées successives de tang. x.

993. Trouver la dérivée de x^x, et, en général, celle de $Fx^{f(x)}$.

994. Déduire toutes les formules d'approximation de la formule

$$f(x+h) - f(x) = h\,f'(x+\theta h)$$

995. Résoudre un triangle rectiligne connaissant un côté, l'angle opposé, et le rectangle des deux autres côtés. — Calculer d'abord les angles, ou d'abord les côtés, et rendre les formules calculables par logarithmes. — Discuter.

996. Trouver le P. G. C. D. des polynomes

$$\left.\begin{array}{l} 48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2 \\ \text{et}\quad 48a^3bx^7 - 48a^4bx^6 - 64a^5bx^5 - 8a^6bx^4 \end{array}\right\}$$

c'est $4a^2bx^2(x^2 - 2ax - a^2)$

997. Même question pour

$$\left.\begin{array}{l} x^3 + yx^2 + x^2 + 2yx - y^3 + y^2 \\ \text{et}\quad yx^2 + x^3 + y^2x + x + y \end{array}\right\}$$

c'est $x + y$.

998. Même question pour

$$(y+1)x^5 + (y+1)^2x^4 + (y^3+2y^2+2y+1)x^3 + (y^4+2y^3+y+1)x^2 + y^2(y+1)^2x + y^2(y+1)$$

$$\text{et}\quad (y+1)x^4 + (2y^2+3y+1)x^3 + (y^3+3y^2+3y+1)x^2 + (y^3+2y^2+2y+1)x + y^2 + y$$

c'est $(x+1)(y+1)(xy+x^2+1)$

999. Résoudre complètement les m équations

$$\begin{array}{l} x + y + z + \dots + u + v = 0 \\ ax + by + cz + \dots + ku + lv = 0 \\ a^2x + b^2y + c^2z + \dots + k^2u + l^2v = 0 \\ \vdots \\ a^{m-1}x + b^{m-1}y + c^{m-1}z + \dots + k^{m-1}u + l^{m-1}v = A \end{array}$$

1000. Partant des Relations qui existent entre les coefficients et les Racines d'une Equation, trouver les Relations qui doivent exister entre les coefficients de l'Eq.

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0$$

pour que la somme de deux Racines soit égale à celle des deux autres : ou pour que le produit de deux Racines soit égal au produit des deux autres : — et Résoudre l'Equation dans chacun des deux cas.

1001. Trouver l'Eq. qui donne $\cos\frac{a}{7}$ en fonction de $\cos a$.

1002. Résoudre l'Equation

$$\operatorname{Tg} 5a = m \operatorname{Tg} a \quad \text{— cas où } m=1$$

1003. Résoudre

$$\sin 5a = m \sin a \quad \text{— cas où } m=1$$

1004. Résoudre

$$\cos 5a = m \cos a \quad \text{— cas où } m=1.$$

1005. Trouver les Relations qui doivent exister entre p et q dans

$$x^3 + px + q = 0$$

pour que l'une des Racines soit égale à une autre ;
" " " " double d'une " .
" " " " m fois " "

1006. Déterminer le diamètre d'un bassin circulaire inaccessible sur la circonférence duquel il n'y a point de points remarquables. — Pourrait-on Résoudre le problème sans se déplacer ? — La Base est-elle d'une longueur quelconque ?

1007. Reconnaître si 3 points inaccessibles sont en ligne droite.

1008. Reconnaître si 4 points inaccessibles sont dans un

même plan, et, dans ce cas, sur une circonférence.

1009. Résoudre un triangle rectangle connaissant ~~b+c~~ a et $\frac{b}{c}$. — Calculer S.

1010. Résoudre un triangle rectangle connaissant a+b+c et $\frac{a}{b+c}$.

1011. Résoudre un triangle rectangle connaissant a+b+c et S.

1012. Résoudre un triangle dont on connaît les angles et la surface.

1013. Résoudre un triangle rectangle dans lequel on connaît a et b−c.

1014. Résoudre un triangle, connaissant A, b et a±c.

1015. Résoudre un triangle, connaissant a, A, et b±c.

1016. Résoudre l'Éq.

$$3^x = 177147 \qquad x = 11.$$

1017. Diviser un angle droit ou un quadrant en 3 parties égales.

1018. Démontrer que les diagonales d'un pentagone régulier se coupent en moyenne et extrême raison.

1019. Trouver dans l'intérieur d'un triangle un point d'où les trois côtés paraissent de même grandeur.

1020. Construire un carré connaissant la somme ou la différence de la diagonale et du côté.

1021. Quel est l'arc dont le cosinus égale la corde ?

c.a.d. $\cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$. $\cos x = -1 + \sqrt{3}$

1022. Résoudre l'Éq.

$$x^{14}-x^{13}+4x^{12}+4x^{11}-36x^{10}+4x^{9}-32x^{7}+240x^{6}+16x^{5}-192x^{4}+64x^{3}-448x^{2}-64x+512=0$$

1023. Résoudre l'Éq.

$$x^{11}-15x^{9}+5x^{8}+80x^{7}-40x^{6}-200x^{5}+120x^{4}+240x^{3}-160x^{2}-112x+80=0$$

1024. Résoudre l'Éq.

$$x^4-6x^3+7x^2+6x-8=0$$

sachant que la somme de deux de ses Racines est 3.

1025. Résoudre les Équations

$$\begin{cases} 60y^2+122xy+62x^2-216y-219x+189=0 \\ 12y^2+10xy+2x^2-48y-23x+21=0 \end{cases}$$

en décomposant chacune d'elles en deux facteurs du 1er degré.

1026. Résoudre les Équations

$$\begin{cases} y^2-xy-2x^2+y+4x-4=0 \\ y^2+xy-6x^2+3y+12x-2=0 \end{cases}$$

en décomposant en deux facteurs l'Éq. formée en ajoutant les deux précédentes. (Cette Éq. revient à $(y+1)^2-4(x+1)^2=0$).

1027. Résoudre

$$x+y=xy=x^2-y^2 \quad \text{(facile)}.$$

1028. Déterminer m par la condition que l'Éq.

$$\frac{x^4}{4}-\frac{5}{3}x^3+\frac{7}{2}x^2-3x+m=0$$

ait des Racines égales.

1029. Pour quelles valeurs de m la division du polynôme $(x+y)^m-x^m-y^m$ par x^2+y^2 se fait-elle exactement ?

1030. Trouver m par la condition que le produit de deux racines de l'équation

$$18x^3 + 27x^2 + mx - 2 = 0$$

soit égal à la 3e, et vérifier sur la valeur obtenue.

1031. Trouver les diviseurs réels du 2d. degré de l'équation

$$x^4 - px^2 + q = 0$$

et distinguer les cas qui se présenteront.

1032. L'éq.

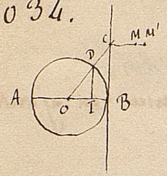
$$x^5 + px + q = 0$$

peut-elle avoir toutes ses racines réelles ?
Quelle est la condition pour qu'elle ait deux racines égales.

1033. Construire la courbe

$$y^2 = (x-1)(x-2)(x-3)$$

1034.



On a un cercle et une tangente indéfinie à un diam. fixe. On mène du centre des sécantes. Par C, on mène une parallèle à AB : telle que

$$CM = CD$$

ou

$$CM' = OI$$

Trouver le lieu de M et celui de M'.

1035. Construire la courbe

$$y = x \pm \sqrt{\frac{1}{x+1}}$$

1036. On a 3 nombres a, b, c ayant un plus grand commun diviseur. On forme les fractions

$$\frac{b}{a} \quad \frac{2b}{a} \quad \frac{3b}{a} \quad \cdots \quad \frac{ab}{a}$$

et

$$\frac{c}{a} \quad \frac{2c}{a} \quad \frac{3c}{a} \quad \cdots \quad \frac{ac}{a}$$

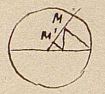
Combien y en a-t-il qui se réduisent à des nombres entiers ?

1037. On donne dans un triangle les distances du

centre du cercle inscrit aux trois sommets. Trouver le rayon de ce cercle. (facile : $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$).

1038. On donne dans un triangle les distances du centre du cercle circonscrit aux trois côtés. Trouver son rayon. –

1039.



Trouver le lieu du point M, en coordonnées rect. ou polaires.

Trouver le lieu du point M'. Construire.

1040. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle droit, mener une sécante telle que la surface du triangle formé soit $\frac{m^2}{2}$, ou telle que la somme des côtés de l'angle droit soit m.

1041. Par un point pris sur la bissectrice d'un angle qcq. mener une sécante minimum, ou une sécante telle que la surface du triangle formé soit minima.

1042. Trouver le nombre des termes du développement de

$$A_0 x^m + (A_1 y + B_1) x^{m-1} + \cdots + A_m y^m + B_m y^{m-1} + \cdots = 0$$

éq. générale en x et y du degré m.

1043. Construire

$$x + x^3 = y + y^3$$

$$x^2 + x^3 = y^2 + y^3$$

$$yx^2 + xy^2 = 1.$$

$$y^4 - x^2y^2 + x^4 = 1$$

$$xy^3 + yx^3 = 1$$

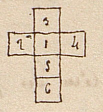
1044. Problème du billard circulaire avec deux réflexions.

1045. Mener une circonférence tangente à 3 droites. Cas où deux sont parallèles. – Cas où elles sont parallèles toutes les trois.

1046. Trouver les développements sur le papier des polyèdres réguliers.

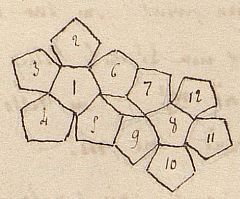
Tétraèdre :

Hexaèdre :

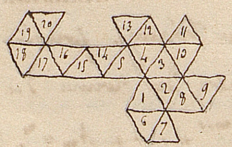


Octaèdre :

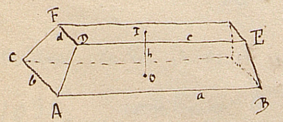
Dodécaèdre :



Icosaèdre :



1047. On a un solide compris entre deux rectangles BC, EF, dont les plans sont parallèles, et dont les faces latérales sont par conséquent des trapèzes.



Posons

$AB = a$, $AC = b$, $DE = c$, $DF = d$,

et désignons par h la distance OI des deux bases parallèles. L'expression du volume sera

$$V = \frac{h}{6}\left\{ab + cd + (a+c)(b+d)\right\}$$

Si l'on fait $a = 2^m,50$, $b = 1^m,50$, $c = 1^m,50$, $d = 0^m,50$, $h = 0^m,50$, il en résulte $V = 1^{m.c.},04166$.. Telle est la forme qu'on donne ordinairement aux tas de sable et de cailloux destinés à l'entretien des routes. On compte ces tas pour un mètre cube, en négligeant l'excédant peu considérable $41^{déc.c.},66$...

1048. Construire les courbes

$$y = x^3 - x$$

$$y = x^3$$

$$y = \text{Tang.}\, x$$

$$\sin(x-y) = 0$$

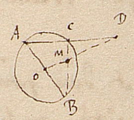
$$\text{Tang}\, y = \sin x$$

$$y^2 - 2yx^3 + x^2 = 0$$

$$y^2 = x^3$$

$$y^2 = x^3 + x$$

1049. Soit AB un diamètre.



ACD qcq.

CD = AC.

on joint DO, CB.

Lieu du point M (calcul ou Géométrie).

1050. Trouver les Eq. des Bissectrices des angles de deux droites. vérifier qu'elles sont perp. l'une sur l'autre.

1051. Soit $F(x,y)$ un polynôme homogène du degré m. Démontrer qu'on a

$$x F'_x(x,y) + y F'_y(x,y) = m F(x,y)$$

1052. Construire la courbe

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

et ses Tangentes principales (parallèles aux axes).

1053. Construire la courbe

$$x^3 - y^2 x + 2yx + 1 = 0$$

1054. Connaissant une Relation entre une Racine d'une Equation et une Racine d'une autre Equation, comment

peut-on trouver ces Racines?

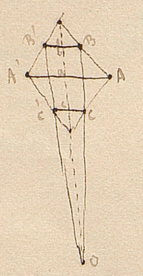
application aux Equations

$$2x^3 - x^2 - x - 3 = 0$$

$$3x^4 + x^3 - 15x^2 + x + 2 = 0$$

sachant que le quadruple d'une Racine de la première est égal au triple d'une Racine de la seconde.

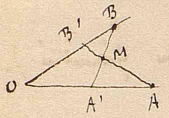
1055.



on a trois droites parallèles. on joint leurs Extrémités deux à deux. Démontrer que les points de Rencontre des lignes de jonction sont en ligne droite.

Très-facile. $\frac{bB}{bB'} = \frac{aA}{aA'} = \frac{cC}{cC'}$ donc bc passe en O.

1056.



Étant donné un angle, et deux points fixes A et B sur ses côtés, on joint les points A et B à deux points A' et B' tels que l'on ait

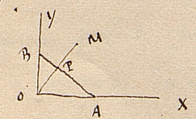
$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{OB}{OA}$$

ou bien

$$OB' + OA = OA' + OB$$

Trouver par le calcul le lieu des points M dans chacune de ces hypothèses.

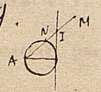
1057.



AB est de longueur constante.
OP perp. sur AB.
PM = OP.
Lieu du point M.

1058. Trouver le lieu des points tels que la somme de leurs distances à deux droites soit constante.
Même problème pour un nombre quelconque de droites.

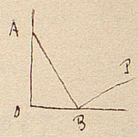
1059.



Lieu du point M, pour que A, N, I, M soient harmoniques. — Même problème en supposant

que la sécante parte du centre.

1060.



AB a une longueur constante.
BP lui est perp.
Enveloppe de BP. (Parabole – facile – Résolu qq part).
Même problème si la perp. est menée au milieu de AB.

1061. Construire les courbes

$$y = -x + \sqrt[3]{x^3 + x}$$

$$y = \pm \sqrt{x(3-x) \pm 2\sqrt{2-x}}$$

1062. Construire la courbe

$$(y^2 + x^2 + a^2)^2 = 4b^2x^2 + c^4$$

et examiner les cas où a est $>$ ou $<$ b et c, ce qui change complètement la forme de la courbe.

1063 Discuter et construire (axes qcq.) les courbes du 2^d. degré :

Ellipses.

$$y^2 - 2xy + 2x^2 + 2y - 2 = 0$$

$$y^2 + 2xy + 2x^2 - 4y - x + 6 = 0$$

$$y^2 + 2xy + 2x^2 - 1 = 0$$

$$y^2 + x^2 - 4y = 0$$

$$4y^2 - 2xy + x^2 - 8y + 4x + 4 = 0$$

$$4y^2 + 2x^2 + 4y - 4x - 9 = 0$$

$$y^2 - 2xy + 2x^2 + 2y - 4x + 2 = 0$$

$$y^2 + xy + 2x^2 + 2x + 3 = 0$$

Hyperboles.

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 2y + 7x - 1 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 3x^2 + 6y - 9x + 2 = 0$$

$$2xy - 4x^2 - 2y + 3x + 2 = 0$$

$$y^2 - 2xy + 3y - x + 5 = 0$$

$$2xy - 4x - y - 2 = 0$$

$$xy - y + 2x - 1 = 0$$

$$xy - 2y + 1 = 0$$

$$2y + 3x + 1 = 0$$

$$xy + y - x - 1 = 0$$

Paraboles :

$$y^2 - 2xy + x^2 - x + 1 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 2y - 3x = 0$$

$$y^2 - y + x - 1 = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + y - x - 2 = 0$$

$$y^2 - 6xy + 9x^2 + 2y - 2x - 4 = 0$$

1064. Construire

$$y = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 3x + 2$$

on décomposera en facteurs :

$$y = (x-1)(x-2)(x^2+1)$$ — Points d'inflexion.

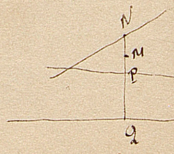
1065. Construire

$$y = x^4 - 16x^3 + 18x^2 - 3x$$

d'où l'on tirera

$$y = x(x-1)\left(x - \frac{15+\sqrt{213}}{2}\right)\left(x - \frac{15-\sqrt{213}}{2}\right)$$

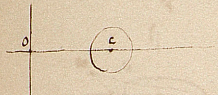
Points d'inflexion.



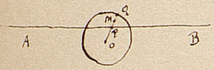
1066. On a trois droites fixes. On mène à l'une d'elles une perp. quelconque. Trouver le lieu des points M tels

que l'on ait $Mq^2 = Nq \cdot Pq$. — Examiner les diverses positions des droites. Chercher quelle doit être leur position pour que le lieu soit une circonférence. (Il faut qu'elles soient perp.)

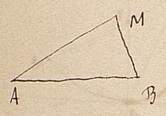
1067. Démontrer que si une courbe a deux axes formant entre eux un angle α, elle en a un 3e formant avec le 2d l'angle α, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on retombe sur le premier.



1068. Le centre d'une circonférence se meut sur une droite indéfinie, et son rayon est proportionnel à CO. Trouver les points d'intersection de deux circonférences très-voisines, et la limite de ces points. — En chercher le lieu.



1069. — On a un cercle coupé par une droite AB. On mène OPq qcq. — Lieu des points M, milieu de Pq.



1070. Sur une base donnée AB, on construit une infinité de triangles où l'angle $B = 2A$. Trouver le lieu des sommets M.

1071. Trouver l'éq. d'une circonférence passant par trois points donnés. — Déduire du calcul la construction géométrique.

1072. Trouver la surface d'un cercle en fonction de la circonférence. $\frac{c^2}{4\pi}$.

1073 Construire les courbes

$$y^4 - 2xy^2 + 2x^2 - 1 = 0$$

$$y^4 - 2x^2y^2 - x^4 + 1 = 0$$

$$y^4 + x^3 = 1$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x^3 - 4x + 9}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}}$$

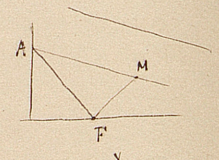
$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^3 - 5x + 4}{x^2 - 4x + 4}}$$

1074. Chercher le lieu des projections d'un sommet d'une Ellipse sur les tangentes.

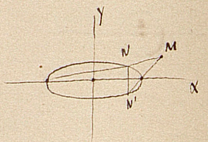
1075. Etant donnée la courbe

$$y^2 - 2xy + 3x^2 + 2x = 0$$

trouver les conditions que doivent remplir les coordonnées d'un point pour qu'il soit intérieur à la courbe.



1076. Par un point fixe F pris sur un des côtés d'un angle droit, on mène une sécante AF quelconque. Par A, on mène une parallèle à une droite fixe donnée, et par F une perp. à AF. Trouver le lieu des points M.

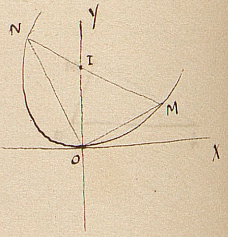


1077. NN' est quelconque. — Trouver le lieu de M.

1078. Pour qu'une courbe du 2d. degré soit tangente à l'axe des x à l'origine, il faut que son Eq. soit de la forme

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy = 0$$

On donne une courbe telle. Alors, on mène par l'origine O une droite quelconque terminée à la courbe, qui est rapportée à des axes rectangulaires. Soit ON. On lui mène une perp. OM. On joint MN. Le point I, où MN coupe l'axe des Y, est constant.



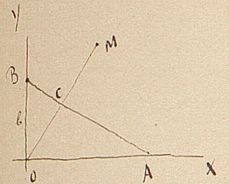
En déduire une manière de mener à une courbe du 2d. degré construite une normale, puis une tangente en un point quelconque.

1079. Démontrer que dans un triangle rectangle, la différence entre la somme des côtés de l'angle droit et l'hypoténuse est égale au diamètre du cercle inscrit.

Construire un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse et la somme des côtés de l'angle droit.

1080. Etant donné un angle quelconque, trouver le lieu des points M tels qu'en abaissant de ces points

des perpendiculaires sur les côtés de l'angle, le quadrilatère formé ait une surface constante et égale à m^2.



1081. On donne deux axes rectangulaires et un point B fixe sur l'axe des y. Par ce point, on mène une infinité de sécantes AB : de O, on abaisse des perp. sur AB, et on les prolonge en M, de manière que CM = OC. Trouver le lieu des points M.

Démontrer géométriquement que c'est un cercle.

Même problème, analytiquement, en prolongeant la perp. d'une longueur constante K. — Transformer l'Eq. trouvée en coor. données polaires. Supposer alors que $K = OB = b$, et construire la courbe.

1082. Trouver le lieu des milieux des cordes d'un cercle qui passent par un même point.

1083. On donne l'Eq. générale d'une hyperbole

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$\theta = 90^\circ.$$

Ramener l'hyperbole à ses asymptotes au moyen d'une seule transformation.

1084. Trouver le lieu des pieds des perp. abaissées du centre de l'hyperbole sur les tangentes : (∞).

Même question pour un des sommets.

1085. Chercher l'Equation générale des hyperboles ayant pour asymptote une droite donnée, et ayant un sommet donné. (On prendra pour axe des y l'asymptote donnée, et pour axe des x une perp. passant par le sommet.)

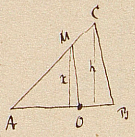
Trouver le lieu des seconds sommets.

1086. Etant donnés une asymptote et 3 points d'une

hyperbole, construire l'autre asymptote, et déterminer les axes en grandeur et en direction.

1087. Étant donnés une hyperbole et une circonférence concentrique, par les différents points de cette circonférence, on mène des couples de tangentes à l'hyperbole, et l'on mène les cordes de contact qui y correspondent. — Trouver le lieu des projections du centre sur toutes ces ~~tangentes~~ cordes de contact.

Si l'éq. a besoin d'être simplifiée pour qu'on puisse la construire, on fera une hypothèse particulière, par ex. que le rayon est égal au demi-axe transverse.



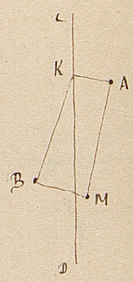
$x.AO = \frac{1}{2} c.h$

$x = \frac{c.h}{2AO}$

{ c'est $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ }

1088. Par un point donné sur un côté d'un triangle, mener une droite qui le partage en deux parties équivalentes.

1089. Trouver la forme que prend l'éq. de la parabole lorsque les axes de coordonnées sont deux tangentes menées d'un même point pris sur le prolongement de l'axe de la courbe.



1090. On donne une droite fixe CD, et deux points fixes A et B situés de part et d'autre de CD, à la même distance. On les joint à un point qcq. K de CD. On mène AM et BM perp. à AK et BK. Lieu du point M.

Pourrait-on prévoir quelques particularités du résultat ?

Supposer que les deux points A et B sont du même côté de CD, et à la même distance.

Construire dans les deux cas.

1091. Trouver la relation qui existe entre les longueurs des portions des directrices de l'ellipse comprises entre l'axe des x et une tangente quelconque à la courbe, quel que soit le point de contact.

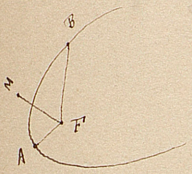
1092. Démontrer que, dans une hyperbole équilatère, le rayon mené du centre à un point de la courbe est moyen proportionnel entre les rayons vecteurs menés resp.t ~~aux~~ foyers.

1093. Étant données deux circonférences, on mène toutes les tangentes possibles à l'une d'elles, et des tangentes à la seconde par les points d'intersection des premières avec cette courbe. Lieu des points M.

Construire le lieu quand les deux circonférences sont extérieures. – Démontrer sur l'éq. que O est un foyer.

Supposer R=0.

1094. Par un point donné, on mène à toutes les courbes du second ordre qui ont même foyers des tangentes et des normales. Lieu géométrique des points de tangence, des points où les normales rencontrent les courbes, et des pieds des perp. abaissées du point donné sur les cordes de contact.



1095. Étant donné une courbe du 2d ordre dont F est un foyer, on prend sur cette courbe deux points A et B, le premier fixe, le second variable. On mène la bissectrice de l'angle AFB et l'on prend M tel que FM soit moyenne proportionnelle entre FA et FB. Lieu des points M.

(Prendre F pour origine, FA pour un des axes. On pourra supposer que A soit un sommet, si l'on a besoin de simplifier l'équation).

1096. Démontrer que, dans la parabole, les carrés des perp. abaissées du foyer sur les tangentes sont entre eux comme les distances du foyer aux points de contact.

1097. Démontrer que, dans la parabole, la droite qui joint le point de concours de deux tangentes au foyer est moyenne proportionnelle entre les droites qui joignent le foyer aux points de contact. (assez facile. Il convient de prendre F pour origine – Bonne comp.)

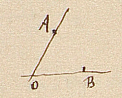
1098. Soit R le rayon, r l'apothème, p le périmètre d'un polygone régulier ; démontrer que l'on a

$$\pi - \frac{p}{2R} < \frac{p(R-r)}{2Rr}$$

1099. Démontrer que si, par un point d'une directrice, on mène deux tangentes à l'hyperbole, la corde de contact passe au foyer correspondant, et la droite qui joint le foyer au point de concours des tangentes est perp. sur la corde de contact.
(Cela est général pour les 3 courbes du 2d. ordre).

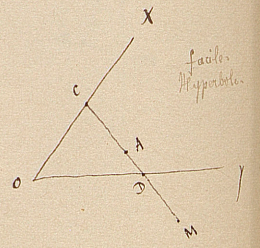
1100. On considère toutes les courbes du 2d. ordre qui ont pour centre un point donné, et qui passent par deux points donnés. On leur mène des tangentes parallèles à une droite donnée. Trouver le lieu des points de contact.
(On prend le centre pour origine, et l'on fait passer les axes par les deux points donnés.)

1101. On a deux axes quelconques, OA, OB. On prend dessus deux points A et B. Il y a une infinité de courbes du 2d. degré tangentes à ces axes en A et B. Trouver le lieu de leurs centres.



(On arrive à une éq. décomposable dont un seul facteur répond à la question).

1102. Lieu des points de concours des tangentes à un cercle dont les cordes de contact passent par un point fixe, intérieur au cercle. (et extérieur ?)



facile. Hyperbole.

1103. On a un angle quelconque et un point A fixe. On mène CD qcq. On prend AM = CD. — Lieu de M.

1104. On a une ellipse. On lui mène une tangente quelconque, et, du foyer F, on mène une droite qui fasse avec la tangente un angle donné θ. Trouver le lieu des points où cette droite rencontre la tangente.
C'est une circonférence, comme dans le cas où θ = 90°.
On peut le dém. géométriquement ? (et même assez facilement). Son centre n'est pas celui de l'ellipse.

1105. Trouver le lieu des sommets des parallélogrammes cons-

traité sur deux diam. conjugués de l'ellipse (en se servant du lieu dans le cercle, d'après la méthode de Gergonne).

1106. Par un foyer d'une ellipse, on mène deux cordes parallèles à deux diamètres conjugués quelconques. – Trouver la relation qui existe entre les longueurs δ et δ' de ces cordes :

$$\delta + \delta' = \frac{2}{a}(a^2 + b^2)$$ – Résolu au commencement.

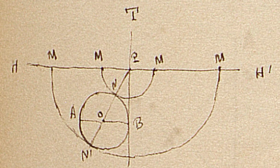
1107. Lieu des projections du foyer de la parabole sur ses normales. (Remarquable – Résolu 1549).

1108. On a une ellipse, on lui mène deux tangentes parallèles, que l'on suppose fixes, et une 3e, mobile, terminée aux deux premières. Trouver que le produit des deux segments de la tgte mobile est égal au carré du demi-diamètre parallèle à cette tangente. (Facile).

1109. On donne deux tangentes d'une parabole, et les deux points de contact. Construire la courbe, ou trouver son équation. {La droite qui joint le sommet de l'angle au milieu de la corde de contact est parallèle à l'axe, comme il est aisé de le vérifier. – On en conclut facilement le foyer et par suite la courbe.

1110. On donne le foyer d'une parabole, une tangente, et le point de contact. Trouver l'axe, le sommet, la directrice. (Très-facile).

1111. On donne un foyer et une tangente d'une parabole. Il y a une infinité de ces paraboles. On demande le lieu de leurs sommets. – C'est une circonférence décrite sur la perp. abaissée du foyer sur la tangente, comme diamètre. (Évident).

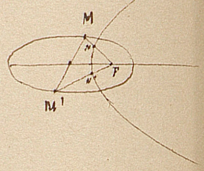


1112. On donne le cercle O, le diam. AB, la tangente BT. On mène à volonté N'ON. Par le point P comme centre on mène une circonférence PN, et PN', tangente à la circonférence O, jusqu'à la rencontre avec la parallèle HH' à AB menée par le point P. – Lieu des points M. (2 Hyperboles Équilatères).

1113. Trouver les coordonnées des foyers de l'hyperbole rapportée à ses asymptotes : $xy = m^2$. — Elles sont égales à $\pm \frac{m}{\cos\frac{1}{2}\theta}$. — Chercher la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer. C'est $\delta = x + y - 2m\cos\frac{1}{2}\theta$.

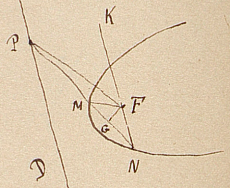
1114. Lieu des sommets d'un angle droit dont les côtés sont normaux à la parabole. (Parabole. — Résolu sous le commencement.)

1115. Une ellipse et une parabole ont même grand axe et un foyer commun. On mène un diam. qcq. MM' de l'ellipse. On joint FM, FM'. Trouver qu'on a

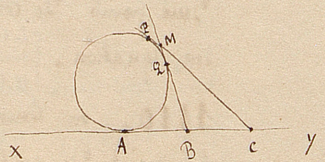


$$\frac{FM}{FN} + \frac{FM'}{FN'} = \frac{2(a+c)}{p}$$

1116. Par un point P de la directrice D d'une courbe du 2d degré, on mène une sécante PMN. — PF est bissectrice de l'angle MFK. — ou bien FG, perp. sur la sécante, est bissectrice de l'angle MFN.

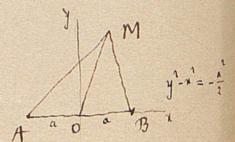


1117. On a une suite de cercles tangents en A à une droite XY. De deux points fixes B et C on leur mène des tangentes. Lieu de leurs intersections M. { Géométriquement, c'est une ellipse. Car QC = AC, QB = AB. D'où QC+QB = MC+MB = AC+AB : B et C sont les foyers. }



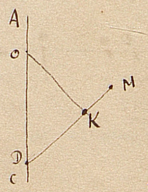
1118. O étant le milieu de AB, lieu des points M tels que

$$\overline{MO}^2 = MA.MB.$$



1119. Dimension d'un segment sphérique à une base dont on connaît la surface Sp convexe et le volume.

1120. La droite AC et le point K sont fixes. OKD est rectangle en K. On prend DM = OD. Lieu de M.



1121. Limite de la somme des plus grands segments d'une droite divisée indéfiniment en moyenne et extrême raison. ($\frac{a}{2}\{\sqrt{5}+1\}$, c.à.d....)

1122. Trois personnes, pour un achat fait en commun, dépensent a fr., b fr. et c fr. On demande ce que la 1ère doit remettre à chacune des deux autres ou en recevoir pour que la dépense soit également partagée. [~~[illegible]~~] $[a+x+y=b-x=c-y]$

1123. On a un 1er lingot renfermant m parties d'Ag et n d'Au.

" 2e " " m' " n' "

" 3e " " m'' " n'' "

et ainsi de suite.

On demande ce qu'il faut prendre de chacun d'eux pour former un lingot renfermant a d'Ag. et b d'Au.

1124. Une sphère de densité connue d est plongée dans un vase rectangulaire rempli d'eau. On connaît le poids total, P, les dimensions du vase a, b, c ; le poids p de l'unité d'une paroi du vase. On demande le rayon de la sphère.

1125. Trouver la limite des valeurs de l'expression

$$\frac{m^2x^2+n^2}{(m^2-n^2)x} \qquad \text{(facile)}.$$

1126. La surface d'un rectangle est m^2. Si ses dimensions croissent l'une de a, l'autre de b, la surface augmente de n^2. Quelles sont les dimensions? (id).

1127. Trouver les limites de l'expression

$$\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2} \qquad \text{(id.)}$$

1128. Quelle est la condition d'égalité de deux fractions continues.

1129. Calculer $\log 2$ par les fractions continues.

1130. Résoudre au moyen des tables

$$\left(\frac{9}{3}\right)^x+\left(\frac{5}{4}\right)^y=4 \quad \text{et} \quad \left(\frac{9}{3}\right)^{2x}+\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{2y}{3}}=\frac{17}{2}$$

$$\left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^x=\frac{5}{4} \qquad \left(\frac{5}{4}\right)^y=\frac{3}{2} \right\}$$

1131. Construire et discuter les Courbes :

$$y = (x-1)^2 - 3$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}$$

$$y^3 + x^3 = r^3$$

$$y^2 = \frac{(x+1)(x-3)}{x-2}$$

$$y = 5x - 3$$

$$y = -3x + 7$$

$$y^3 - 3axy + x^3 = 0$$

$$y^2 + 2x^2 - x - 1 = 0$$

$$y^2 - 2xy - 2x^2 - 4y - x + 16 = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + 4y - 2x - 3 = 0$$

$$y^2 - 2xy + 2x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$y^2 - xy - 1 = 0$$

$$y^2 - 2xy - 3x^2 - 6y - 2x + 5 = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + 3y - 3x + 2 = 0$$

$$y^2 - 2xy + 3x^2 + 2y - 4x - 3 = 0$$

$$y^2 - 4xy + x^2 + 6y - 5 = 0$$

$$y^2 - 2xy - 8x^2 + 4y + 14x - 5 = 0$$

$$y^2 - 10xy + 23x^2 - 2y - 14x - 2 = 0$$

$$yx^2 - x^3 - 4y + 1 = 0$$

$$y^2 + 4xy + 4x^2 + 6y + 13x + 8 = 0$$

$$xy - x^2 + 2y - 3x + 1 = 0$$

$$3x^2 + 5y - 2x - 7 = 0$$

$$y^2 - 2axy + a^2x^2 - b^2 = 0$$

$$x^2y - x^2 - x + 2 = 0$$

$$y(x-1)^2 - 2x^2 + 3x + 5 = 0$$

$$x^2y + 2xy + y - x^2 = 0$$

$$\rho = \frac{a}{\sin\omega - \cos\omega}$$

$$\rho = 1 + \sin\omega$$

$$\rho = 1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$$

$$\rho = \sin 2\omega$$

$$\rho = \sin m\omega$$

$$\rho = \sin\frac{\omega}{2}$$

$$\rho = \frac{1}{1+\sin\omega}$$

$$\rho = \frac{m}{\omega}$$

$$\rho^2 = \frac{a}{b\sin^2\omega + c\cos^2\omega}$$

$$xy^2 - 3xy - y + 2x + 3 = 0$$

$$\rho = \frac{1}{1+\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}$$

$$\rho = \frac{\sin\omega}{\omega}$$

$$\rho = \frac{\cos\omega}{\omega}$$

$$y^2 - x^2y + 2xy - x^3 + 2y + 2x = 0$$

$$x^2(y^2-1) + 3x(y^2+1) + 2(y^2-1) = 0$$

$$y = x^3$$

$$y^2 = x^3$$

$$(y - x^2)^2 \cdot (1 - x^2) - x^4 = 0$$

$$x^2 y - 3xy + 2y - x + 3 = 0$$

$$y^2 - 2y(x-1) + \frac{(x-1)(x^2-1)}{x+1} = 0$$

$$y = \text{Log}\, x$$

$$y = \frac{1}{\text{Log}\, x}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^4+1}{x^2+1}}$$

$$y = x \pm \sqrt{x^3}$$

$$\rho = \cos \frac{2\omega}{3}$$

$$\rho = \cos \frac{\omega}{3}$$

1132. Inscrire dans un angle une droite de longueur déterminée, de manière que la bissectrice la partage dans un rapport donné.

cela revient à construire un triangle connaiss^t. l'angle au sommet, la base et le rapport des deux autres côtés.

1133. De tous les parallélipipèdes rectangles de même base et de même surface, quel est le maximum et le minimum ?

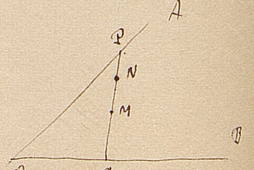
1134. Démontrer que

$$\sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} = \cot. \frac{\pi}{2n}$$

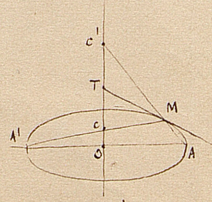
voir 1483.

1135. Trouver les angles d'un triangle dont les côtés sont 2, 3, 4.

1136. OA, OB, et N sont fixes. M est le milieu de PQ. Lieu de M. (Hyperbole) (facile).



1137. Dans une ellipse, M est un point quelcq. on joint AM, A'M, qui coupent le petit axe en C et C'. On prend T, milieu de CC'. Prouver que TM est tangente à l'ellipse :- ou bien : - MT étant tangente, prouver que TC = TC'.

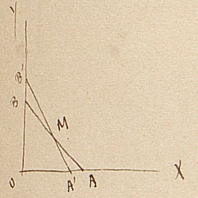


facile par le calcul direct.
on a aussi $OC \cdot OC' = b^2$.

Le maximum de cette longueur est $m = a+b$.

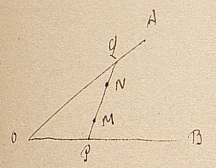
1138. Mener une Tangente à l'Ellipse telle que la partie interceptée entre les axes soit de longueur donnée. (facile).

1139. Lieu des milieux des parties de Tangentes à l'Ellipse comprises entre les axes. (facile: $a^2y^2 + b^2x^2 = 4x^2y^2$).



1140. Trouver les coordonnées du point M d'intersection de deux droites infiniment voisines, sachant que $AA' = BB'$. Lieu des points M. — ou bien, si aire $OAB = OA'B'$. (1546).

1141. On a deux circonférences. Par tous les points de l'une, on mène des Tangentes à l'autre. Trouver le lieu des milieux des cordes de contact.



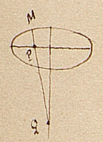
1142. OA et OB, et N sont fixes. — On prend $PM = QN$. Lieu des points M. (Évidemment, ce doit être une hyperbole).

1143. Lieu des projections du foyer ou du sommet de la parabole sur les Tangentes. (Pour le foyer, v. 1549).

1144. Lieu des milieux des portions de Tangentes à l'hyperbole comprises entre les axes. (facile, comme 1139)

1145. Démontrer géométriquement que, quand une courbe possède un Centre et un Diam. rectiligne, elle en possède un autre conjugué du premier. (facile)

1146. Lieu des points d'où l'on peut mener à la parabole deux Tangentes faisant un angle V. — Cas où $V = 90°$. (Hyperbole en général : on prend l'Éq. $y = mx + \frac{p}{2m}$).



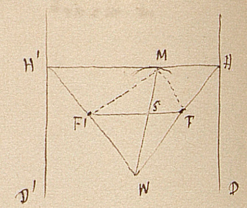
1147. Démontrer que si, par un point M, on mène une normale à l'Ellipse, on aura

$$\frac{MP}{MQ} = \text{Const.} \qquad (1547)$$

1148. Construire les courbes du 2d. degré, connaissant

le foyer, la Directrice, et une Tangente.

(*) **1149.** D et D' étant les Directrices d'une Ellipse, F et F' ses foyers, M un de ses points, HH' une parallèle à FF'. On joint HF, H'F' qui se coupent en N. MN est la normale à l'Ellipse en M. (Car $\frac{FS}{F'S} = \frac{MH}{MH'} = \frac{MF}{MF'}$ donc MS bissecte FMF'. — on s'appuie ici sur la propriété des Directrices)



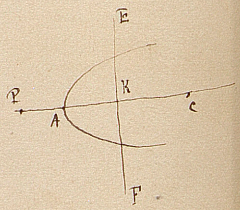
1150. Trouver l'hyperbole, connaissant une asymptote et trois points.

1151. Une Ellipse étant placée sur un cône, ses deux sommets sont, l'un le point le plus près, l'autre le plus loin du sommet du cône.

1152. Démontrer géométriquement que, si le Pôle est sur l'Ellipse, la polaire est tangente en ce point.

Trouver quelle doit être la position du pôle pour que la polaire soit parallèle à une asymptote.

Soit P le pôle, EF la polaire d'une Ellipse de centre C.



on a

$$CP.CK = \overline{CA}^2$$

En déduire pour la parabole

$$PA = AK.$$

1153. Lieu des milieux des cordes de l'Ellipse ou de l'hyperbole passant par un point fixe. — Faire voir que, si le point est sur la courbe, les deux lieux ont en ce point une tangente commune.

Même question pour la Parabole.

1154. Quand deux paraboles sont asymptotiques, si, d'un point de la parabole intérieure, on mène une perp. à l'axe, ce point divise la corde ainsi obtenue en deux segments dont le produit est constant.

1155. Un triangle étant inscrit dans une courbe du 2^d. degré, démontrer que le diamètre conjugué de l'un des côtés du triangle rencontre les deux autres en deux points tels que la polaire de l'un passe par l'autre.

1156. Trouver la parabole, connaissant le sommet, un point, et le paramètre.

1157. Trouver une courbe du 2^d. degré quand on donne le centre, deux tangentes, et la longueur du grand axe.

1158. Si l'on prend 4 points sur une courbe du 2^d. degré, et qu'on mène les cordes qui les joignent, ces cordes concourent deux à deux en des points tels que chacun d'eux est le pôle de la droite qui passe par les deux autres.

1159. Quel est le nombre de points nécessaires pour déterminer une courbe de l'ordre m ?

1160. Trouver une courbe du 2^d. degré connaissant le centre et 3 points. (Résolu, 1545).

1161. Calculer le P. G. C. D. entre

$$A = 48a^2b^3x^6 - 120a^3b^3x^5 + 12a^4b^3x^4 - 12a^6b^3x^2$$

$$B = 48a^3bx^7 - 88a^4bx^6 - 64a^5bx^5 - 8a^6bx^4$$

Très-facile en prenant le centre pour origine.

1162. Démontrer que deux courbes du 2^d. degré concentriques se coupent en 4 points ou ne se coupent pas du tout.

Faire voir que ces 4 points sont les sommets d'un parallélogramme, et que par suite les deux courbes ont un système de diamètres conjugués commun.

1163. Étant donné $\rho = 1 + \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$, trouver le nœud et le point le plus élevé de la courbe.

1164. Séparer les racines égales de l'équation

$$x^7 + 5x^6 + 6x^5 - 6x^4 - 15x^3 - 3x^2 + 8x + 4 = 0$$

1165. Trouver la parabole, connaissant le foyer, une tangente, et un point. (Très facile).

1166. Trouver l'Hyperbole, connaissant une asymptote, un sommet, et la distance des foyers.

1167. On donne un polygone dans le plan d'une ellipse. On en forme un second en joignant les pôles des côtés du 1er. — Les côtés de ce second polygone seront les polaires des sommets du 1er.

1168. Étant donnée l'Éq.

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

exprimer

1°. qu'elle possède deux racines doubles.

2°. " une " triple.

1169. Condition générale pour qu'une Éq. du degré m ait une racine triple.

1170. Exprimer au moyen de la Théorie des racines égales que le polynôme

$$x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$$

est une 5e. puissance exacte.

1171. Démontrer que si le polynôme du degré m en x est rendu nul pour $m+1$ valeurs différentes de x, ses coefficients sont nuls séparément. } Connu.

1172. Si le polynôme du degré m est nul pour toutes les valeurs de x comprises entre α et β, ses coefficients sont nuls séparément.

1173. Démontrer que si, dans une Équation, 2n termes consécutifs manquent, il y a au moins 2n Racines Imaginaires. En déduire que :

1°. S'il y a un nombre impair de coefficients en progression Géométrique, l'Éq. possède au moins autant de Racines Imaginaires qu'il y a de termes en progression, moins un.

2°. Si dans une Éq. il y a un nombre pair de coefficients en progression arithmétique, il y a au moins autant de Racines Imaginaires qu'il y a de termes en progression, moins deux.

1174. Calculer la Racine positive de

$$x^3 - 2x - 5 = 0$$

1175. Déterminer les Racines Commensurables de

$$30x^3 - 43x^2 - 7x + 6 = 0$$

1176. Exprimer que l'Éq.

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \Big\}\ 4p^3 + 27q^2 = 0$$

a deux Racines Égales.

1177. Séparer les Racines positives de

$$5x^4 - 9x^3 - 13x^2 + 10x + 6 = 0$$

1178. Résoudre

$$x^3 + x + 1 = 0$$

1179. Chercher les diviseurs du 2d. degré de

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 1 = 0$$

1180. Déterminer les Racines Commensurables de

$$x^7 - 2x^6 - 3x^5 + 7x^4 - 14x^3 - 121x^2 + 200x + 300 = 0$$

1181. Démontrer que

1°. Si dans une Eq. les 2 derniers coefficient tendent vers 0, 2 racines tendent vers 0.

2°. Si les 2 premiers coef. tendent vers 0, 2 racines augmentent indéfiniment.

1182. Etant donné

$$x^3 + px^2 - x + 3 = 0$$

Déterminer p par la condition

1°. que la somme des racines soit égale à 1.

2°. que la différence de deux racines soit égale à 2.

et Résoudre. (facile et joli).

1183. On fait passer une circonférence par les 2 extrémités du petit axe de l'ellipse. Trouver les conditions que son rayon doit remplir pour qu'elle coupe l'Ellipse en 4 points. ($R > b$ et $R < \frac{a^2+b^2}{2a}$, très facile).

1184. Trouver les facteurs commensurables du 2d. degré de l'Eq.

$$5x^4 - 5x^3 - 13x^2 + 10x + 6 = 0$$

1185. Résoudre les Eq.

$$x^6 - 3x^5 + 3x - 1 = 0$$

$$y^8 \mp 1 = 0$$

$$y^6 \mp 1 = 0$$

$$x^3 - 7x + 7 = 0$$

1186. Transformer

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 - x - 1}$$

en fractions plus simples.

1187. Démontrer algébriquement que, si m et n sont premiers entre eux, les Racines de l'Éq.

$$x^{mn} = 1$$

peuvent s'obtenir en multipliant les Racines de

$$x^m = 1$$

par celles de

$$x^n = 1$$

En déduire un moyen de simplifier la Recherche des Racines de

$$x^{pqr} = 1$$

quand p, q, r sont premiers entre eux.

1188. Résoudre

$$x^4 + 5x^3 - 7x^2 - 29x + 30 = 0$$

sachant que le produit de deux Racines est −10. (x)

(on trouve $(x-1)(x-2)(x+3)(x+5) = 0$

(x) $x_1x_2 = -10$

$x_3x_4 = -3$

d'ailleurs

$(x_1+x_2)+(x_3+x_4) = -5$

$x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 = 29$

ou

$x_1x_2(x_3+x_4) + x_3x_4(x_1+x_2) = 29$

$-10(x_3+x_4) - 3(x_1+x_2) = 29$

Il est donc aisé de trouver x_1+x_2 et x_3+x_4 et par suite ces Racines.

1189. Résoudre

$$x^7 - x^6 - x^5 + x^4 - x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

Séparer les Racines égales.

1190. Si l'équation

$$x^6 + Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Bx^2 + Ax + 1 = 0$$

admet pour Racines +1 ou −1, elle l'admet un nombre pair de fois. — puisqu'elle est Réciproque.

1191. Étant données deux paraboles dont les axes coïncident, et qui ont l'ouverture dirigée dans le même sens, trouver le Lieu des points d'où les Tangentes menées à la parabole extérieure sont telles que les cordes de contact touchent la parabole intérieure.

autre Parabole.

Facile.

Elle est égale aux deux autres si celles-ci le sont.

1192. L'Ellipse étant rapportée à son centre et à ses axes, on abaisse du centre une perp. sur les tangentes. On demande le lieu du point de cette perp. dont l'abscisse est la même que celle du point de contact.

1193. Démontrer que la fraction

$$\frac{f(x)}{f'(x)}$$

change toujours de signe en passant par zéro, lors même que $f'(x)$ a des facteurs doubles. (Je crois que c'est faux : car cette fraction représente la sous-tangente, qui devient nulle sans changer de signe quand la courbe $y=f(x)$ présente un point d'inflexion où la tangent. est parallèle à l'axe des y).

1194. Décomposer

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

en fractions plus simples. {Très-facile ; c'est $\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\cdots$}

1195. Démontrer que l'Eq.

$$f(x)=0$$

à coefficients commensurables, ne peut avoir une racine commune avec

$$x^3-7=0$$

sans en avoir trois.

1196. Démontrer par la trigonométrie sphérique que, dans un trièdre, chaque face est plus petite que la somme des deux autres.

1197. Démontrer que, pour toute valeur de x racine de

$$x^7-1=0$$

la somme

$$x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6$$

a une valeur réelle et commensurable. {C'est trop évident. Cette valeur est 6 pour $x=1$ et -1 pour les autres racines, qui annulent $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$, dont le prodt. par $x-1$ est x^7-1.

1198. Déduire de l'expression générale de l'angle de

deux plans les conditions de parallélisme et de perpendi-
-cularité.

1199. Si

$$f(x, y, z)$$

est nul pour tous les points du plan

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

démontrer que $f(xyz)$ est divisible par $Ax + By + Cz + D$.

1200. Résoudre

$$xyz = c(x+y) = b(x+z) = a(y+z)$$

1201. Étant donnée l'Eq.

$$x^3 - x + m = 0$$

déterminer m de manière qu'il y ait deux racines égales. — Ré-
-soudre ensuite.

1202. Déduire du théorème de Rolle le principe des racines égales.

1203. Séparer, au moyen du théorème de Rolle, les racines de l'Eq.

$$x^5 - px + q = 0.$$

1204. Trouver l'équation aux sommes des racines de

$$x^3 + px + q = 0$$ { Il suffit de changer x en $-x$, ce qui donne $x^3 + px - q = 0$.

1205. a, b, c étant les racines de l'Eq.

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

trouver l'Eq. qui a pour racines

$$\frac{ab}{c}, \quad \frac{ac}{b}, \quad \frac{bc}{a}.$$

1206. Démontrer directement que

$$\varphi(x - az, y - bz) = 0$$

350

et l'Eq. Générale des Cylindres, et que

$$\varphi\left(\frac{x-x'}{z-z'},\ \frac{y-y'}{z-z'}\right)=0$$ Facile.

est l'Equation des cônes.

1207. Trouver les Equations d'un cercle situé d'une manière qq. dans l'espace, et celles de ses projections. — Le cercle sera regardé comme l'intersection d'une sphère et d'un plan.

1208. Si, d'un point extérieur, on mène deux tangentes à l'Ellipse, elles font des angles égaux avec les droites qui vont de ce point aux foyers.

1209. Démontrer que la somme des puissances semblables des Racines m.es de l'unité est nulle, à moins que l'exposant de la puissance ne soit un multiple de m.

1200. Faire voir que si, dans l'Equation $x^m-1=0$, on supprime les Racines égales à ±1, et qu'on abaisse l'Eq. Réciproque obtenue, l'Eq. transformée aura toutes ses Racines Réelles. — Facile.

1211. Trouver l'Ellipse, connaissant deux foyers et la somme des axes. — on a donc $a+b$ et $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $c=\sqrt{(a+b)(a-b)}$, d'où $a-b$.

1212. Trouver l'hyperbole, connaissant une asymptote et une tangente avec le point de contact.

1213. Trouver l'Eq. aux carrés ou aux Racines carrées des Racines d'une Eq. donnée.

1214. Trouver une hyperbole, connaissant:

1°. une asymptote, un point et la grandeur des axes;

2°. " un foyer et une tangente.

1215. Trouver une courbe du 2d. degré, quand on donne deux tangentes, un foyer, et la direction de l'axe focal. (Très-facile)

1216. Trouver la parabole, quand on donne deux

facile. Tangentes et le foyer, ou deux tangentes et les points de contact.

1217. Trouver le nombre des racines réelles de l'éq.

$$x^3 - 7x^2 + 8 = 0 \qquad (x)$$

(x) Elle admet la racine $x = -1$. De plus, pour $x = -2$, le 1er. membre est > 0. Donc il y a encore une racine réelle entre -2 et $+\infty$. Donc il y en a 3 ; enfin, il manque 2 termes consécutifs : donc il y a 2 racines imaginaires.

1218. Représenter géométriquement l'expression

$$\frac{+ f(x)}{f'(x)} \qquad \text{C'est la sous-tangente.}$$

1219. Trouver le second foyer de la courbe du 2d. degré représentée par l'éq.

$$(y-\beta)^2 + (x-\alpha)^2 - (my + nx + p) = 0$$

1220. Résoudre l'éq. du 3e. degré, quand une des racines est moyenne proportionnelle entre les deux autres.

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ on a $x_1 x_2 x_3 = x_1^3 = -r$ $\quad x_1 = -\sqrt[3]{r}$ et il est facile de trouver ensuite x_2 et x_3

1221. Examiner si les racines de l'éq.

$$x^3 - x^2 - 3 = 0$$

sont réelles. (Non, th. de Descartes).

1222. Démontrer que l'angle de deux petits cercles est égal à celui des deux grands cercles qui vont du point d'intersection aux pôles des deux petits cercles.

1223. Décomposer

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}$$

en fractions plus simples.

1224. Par un point pris dans la parabole, mener une normale à la courbe. Condition pour qu'il y en ait une, deux ou trois. (Cirodde)

1225. On projette une ellipse sur un plan. Démontrer que ses axes se projettent suivant deux diamètres conjugués. — Condition pour que ce soient des axes.

Généralement, deux diamètres conjugués quelconques se projettent aussi suivant deux diamètres conjugués.

1226. Théorème de Guldin.

1227. Placer entre deux plans inclinés deux Sphères, s'appuyant l'une sur l'autre, en Equilibre.

1228. Equation aux Carrés des Différences de

$$x^6 + 1 = 0$$

1229. Equation aux sommes 3 à 3 d'une Eq. donnée. Supprimer les Racines de la forme $3a$ et $2a+b$.

1230. Trouver les Diviseurs du 3e. degré du 1er. membre d'une Equation.

1231. Etant donnée une Ellipse de foyers F et F', trouver un point M tel que

$$\operatorname{tg} MFF' \cdot \operatorname{tg} MF'F = \text{minim.}$$ (c'est B, facile)

Démontrer que, qq. soit le point M, on a toujours

$$\operatorname{tg} \frac{MFF'}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{MF'F}{2} = \text{Const.}$$

{on y arrive aisément, en considérant le triangle FMF', et employant les formules $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \ldots$ $\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \ldots$}

1232. Décomposer en fractions simples

$$\frac{1}{(x-2)^3(x-1)^2}$$

1233. abaisser le degré d'une Eq. dont les Racines sont en progression Géométrique.
Cas où l'Eq. est du 4e. degré.

1234. Lieu des milieux d'une droite de longueur constante glissant sur deux droites de l'Espace.

1235. Equations de la Bissectrice de l'angle de deux droites de l'Espace.

1236. Lieu des milieux des cordes égales d'une Ellipse. (4e. degré : Elimination assez jolie ; sans intérêt).

1237. Résoudre l'Eq.

$$2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$$

1238. Démontrer que l'intersection de deux surfaces du 2^d. degré qui ont un plan principal commun se projette sur ce plan suivant une courbe du 2^d. degré. (Leroy).

1239. Ramener la recherche du côté de l'Heptagone régulier à la résolution de l'Eq. $x^7 - 1 = 0$

1240. Prouver que l'intersection d'un plan et d'une surface de révolution possède toujours un axe de symétrie.

1241. La tangente à l'intersection de deux surfaces est perp. au plan des normales aux deux surfaces menées par le point de contact. (Connu).

1242. Trouver un triangle dont les côtés et la surface soient exprimés par 4 nombres entiers consécutifs.

1243. Lieu des foyers des hyperboles équilatères ayant même centre et un point commun.

1244. Lieu des sommets des hyperboles ayant une asymptote et un foyer communs.

1245. Lieu du second foyer des Ellipses ayant deux tangentes et un foyer donnés. (Droite, facile géométriquement)

Pour le foyer, cercle – immédiat.
" Sommet, Ellipse – facile (un peu de calcul)

1246. Lieu du sommet ou du foyer des paraboles ayant une directrice et un point communs.

1247. Résoudre l'Eq.

$$x^4 + 2x^2 + 4 = 0$$

et ramener ses racines à la forme $a + b\sqrt{-1}$.

$x = \pm\sqrt{-1 \pm \sqrt{-3}}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \pm \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{-1}$

1248. Par un point pris dans l'intérieur d'un cercle, mener deux cordes perp. entre elles, et telles que leur produit soit maximum ou minimum.

1249. Étant donnée l'Eq.

$$y^2 - 2xy - x^2 + 4y - 2x = 0$$

d'une courbe rapportée à des axes rectangulaires, la ramener par la transformation des coordonnées à la forme

$$y^2 = 2px + qx^2$$

1250. Discuter et construire la courbe

$$(y - x + 1)^2 = \frac{x-1}{x+1}$$

Trouver les asymptotes, et chercher l'Eq. générale de la tangente.

1251. Trouver la forme de l'Eq. du 2d. degré quand on prend pour axes la tangente et la normale en un point de la courbe.

En déduire le théorème 1078. (Résolu quelque part).

1252. Trouver les foyers de la courbe du 2d. degré lorsque l'Eq. est ramenée à la forme

$$y^2 = 2px + qx^2$$

Démontrer la propriété fondamentale des foyers.

1253. Lieu des points tels que leurs polaires par rapport à la courbe

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$$

soient tangentes à la courbe

$$a_1^2y^2 + b_1^2x^2 = a_1^2b_1^2$$

1254. On a l'Eq. générale

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$

axes rectangulaires.

Examiner ce qui arrive de particulier

1°. Si l'un q.q. des coefficients est nul

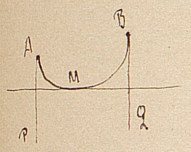
2°. Si 2 " " " sont "

1255. Construire et discuter

$$\rho = \frac{a}{1 - \cos\frac{\omega}{2}}$$

Trouver l'Eq. en coordonnées Rectilignes.

1256. Etant donnés deux points et une droite de l'Espace, trouver par l'analyse un point de la droite également éloigné des deux points donnés. — Déduire du calcul la solution Géométrique du problème.



1257. Un arc AMB peut glisser sur une droite située dans son plan. Il est sollicité à ses Extrémités par deux forces perp. à la droite. — Chercher la condition d'Equilibre. Cas où l'arc AMB = ½ cercle.

1258. Centre de Gravité du tronc de pyramide Triangulaire. (Connu).

1259. On donne un cylindre. On prend sur l'axe un point S qui partage cet axe dans un Rapport donné. On prend ce point comme sommet de 2 cônes ayant pour bases celles du cylindre. On retire ces Cônes, et l'on demande le Rapport des distances aux Bases du centre de Gravité de la partie Restante.

1260. Lieu des points tels que le produit de leurs distances à deux points fixes soit constant, et égal à q^2. La distance des deux points étant a, on fera successivement

$q = a$, $q > a$, $q < a$. (Résolu qq. part)

1261. On donne les deux foyers et une directrice d'une Ellipse. Trouver les axes. (Facile).

1262. Construire une Courbe du 2^d degré, connaissant la directrice, le centre et un point. (assez facile).

1263. On donne les deux asymptotes et la directrice d'une hyperbole. Trouver les deux foyers et les sommets.

1264. On donne une asymptote et une directrice d'une hyperbole.

Lieu des centres.

" 1ers foyers.

" " sommets.

" 2es. foyers

" " sommets.

1265. Eq. d'une parabole passant par 4 points. Ces 4 points peuvent-ils être les sommets d'un parallélogramme, c.a.d. peut-on inscrire un parallélogramme dans une parabole ? Le problème est-il toujours possible ? Condition de possibilité. — La valeur de B tirée de

$$B^2 = 4AC$$

donne-t-elle toujours deux courbes ? Distinction : cas où il y a deux courbes ; cas où il y a une courbe et deux parallèles.

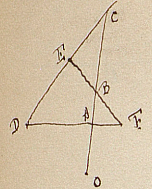
Supposer que deux des points viennent tendre vers les deux autres. Que devient le problème ? Equation de la parabole dans ce cas.

1266. Démontrer que si par un point d'une hyperbole, on mène une parallèle à une asymptote jusqu'à la rencontre d'une directrice, cette ligne est égale à la distance du point au foyer correspondant.

1267. Construire une courbe du 2d degré, connaissant

1°. Un foyer et 3 points ;

2° une directrice " " .



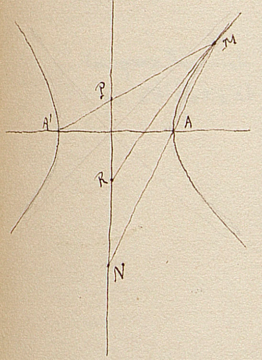
1268. on donne un triangle DEF, et un point O. Mener par ce point une sécante telle que

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} = \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$$ (par le calcul).

1269. Etant donné une asymptote, une directrice et un point d'une hyperbole, construire la courbe.

1270. Etant donné deux points, un foyer, et la direction d'une asymptote d'une hyperbole, construire la courbe.

1271. on donne les deux sommets d'une Ellipse, et un point de la courbe. La déterminer. – Trouver la tangente au point donné. (Confer: 1137).

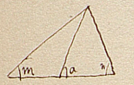


1272. on a une hyperbole, un point M quelconque de la ~~Ellipse~~ courbe; on mène la tangente MR, et MP, MN, qui joignent le point M aux extrémités du premier axe. Démontrer que l'on a

$$PR = RN$$

comme dans l'Ellipse.

1273. on donne deux points d'une courbe du 2d. degré, la tangente en un de ces points, et un foyer. construire.



1274. Calculer l'angle que la médiane d'un triangle fait avec la base, connaissant les deux angles à la base.

on a $$\operatorname{Tg} a = \frac{2 \sin n \sin m}{\sin(n-m)}$$

1275. on donne deux tangentes, un des points de contact et un foyer. Construire l'autre foyer de la courbe.

1276. Construire les courbes

$$\rho = \frac{1}{1-\mathrm{Cot}\,\theta}$$

$$\rho = 3\,\mathrm{Cos}\,\omega - 4\,\mathrm{Sin}\,\omega$$

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{Sin}\,\omega}$$

$$\rho = \frac{1}{\mathrm{Cos}\,\omega}$$

$$\rho = \mathrm{Cos}\,5\omega$$

$$\rho = \mathrm{Cos}\,n\omega$$

$$\rho = a\,\mathrm{Cos}\,3\omega$$

$$\rho = \frac{1-\mathrm{Sin}\,\omega}{1+\mathrm{Sin}\,\omega}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cos}\,\omega - \mathrm{Sin}\,\omega}{1+\mathrm{Sin}\,\omega}$$

$$\rho = \frac{\pm 1}{\mathrm{Sin}\,\omega \pm \mathrm{Cos}\,\omega}$$

$$\rho = \frac{3\,\mathrm{Sin}\,\omega}{\mathrm{Sin}^2\omega - \mathrm{Cos}^2\omega}$$

$$\rho = \frac{3\,\mathrm{Sin}^2\omega}{1-\mathrm{Sin}^2\omega}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Tg}\,\frac{\omega}{2}}{\mathrm{Cos}^2\omega}$$

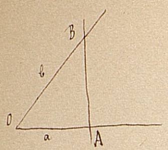
$$\rho^2 - 3\rho\,\mathrm{Cos}\,\omega - \mathrm{Sin}^2\omega = 0$$

$$\rho = \mathrm{Sin}\,\omega + \mathrm{Cos}\,\omega \quad \text{(cercle).}$$

$$\rho = \frac{1+\mathrm{Sin}^3\omega + 2\,\mathrm{Sin}\,3\omega}{3\,\mathrm{Cos}^2\omega - \mathrm{Cos}\,2\omega}$$

$$\rho = L.\,\theta$$

$$\rho = a^\theta \quad \begin{cases} a > 1 \\ a < 1 \end{cases}$$



1277. On a un angle AOB. – Démontrer que toutes les droites telles que AB, pour lesquelles on a

$$\frac{ab}{a+b} = m.$$

se coupent en un même point. (facile).

Conséquence de ce que le prod^t. des distances des foyers à une tg^te qcq. est constant.

1278. Dans l'Ellipse et l'Hyperbole, le produit des distances d'un foyer à deux tangentes parallèles est constant.

facile.

1279. Dans l'Ellipse et l'hyperbole, le produit des rayons vecteurs aboutissant à un point qcq. de la courbe est égal au carré du ½ diam. conjugué de celui qui passe par ce point.

Conséquence immédiate de ce que $a'b' \sin\theta = ab$.

1280. Dans l'Ellipse et l'hyperbole, le produit d'un ½ diamètre par sa distance à la tangente parallèle est constant.

1281. Dans l'Ellipse, la somme des carrés des inverses des distances du centre à deux tangentes parallèles à deux diamètres conjugués, est constante.

1282. Dans l'Ellipse et l'hyperbole, le carré de la distance du centre à une tangente quelconque est égal à la somme des produits des distances des extrémités des axes principaux à cette même tangente.

1283. Si par deux points conjugués de l'Ellipse on mène des tangentes, la somme des produits des segments compris entre les points de contact et les tangentes aux extrémités du grand axe, est constante.

1284. Trouver l'Éq. de la courbe qui coupe en moyenne et extrême raison toutes les cordes parallèles d'une parabole. (1550).

1285. En chaque point d'un petit cercle d'une sphère, on lui mène un grand cercle tangent. On prend à partir du point de contact T, sur le grand cercle, un arc TM d'un quadrant. Trouver le lieu des points M.

1286. Construire

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^4 - 1}$$

$y = x^2$ est une parabole diamètre.

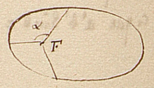
$y = 2x^2$ est une parabole asymptote.

1287. Construire

$$y = x - \sqrt[3]{x^3 + x}$$

$$x^3 y - y^3 x = 1 \qquad (y = tx)$$

1288. On mène par un foyer d'une ellipse, qui est le pôle, trois rayons formant des angles égaux entre eux. Trouver la somme des inverses de ces rayons, en coordonnées polaires.



C'est $\frac{3}{p}$.

Cela est vrai quel que soit α et ~~l'angle~~ q.q. soit le nombre des rayons vecteurs. Car si l'on inscrit dans un cercle un polygone régulier, et qu'on considère ses sommets comme extrémités d'arcs comptés à partir d'un même point quelconque de la circonférence, la somme des cosinus de tous ces arcs est nulle, ainsi que celle de leurs sinus.

1289. A construire

$$y = 2x \pm \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{4x - x^2}}$$

1290. Démontrer que $0^0 = 1$. { facile. on prend u^v, $u = \varphi(x)$ $v = \psi(x)$; puis on prend les logarithmes, etc.

1291. Résoudre

$$xy = \beta$$
$$\text{arc tg}\, x - \text{arc tg}\, y = \alpha.$$

} facile

1292. Construire

$$\rho = \frac{1}{1 + \cos\omega\sqrt{2} + \sin\omega\sqrt{2}} \quad \text{(hyperbole)}$$

$$\rho = \frac{\cos\omega - \sin\omega}{1 - \sin 2\omega} \quad \text{(droite)}.$$

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$$

$$(y^2 - x^2)^2 - x^5 = 0$$

$$y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0 \quad \text{(Courbe du Diable)}.$$

$$y^4 + x^4 - 2ay^3 - 2bx^2y = 0 \quad \begin{cases} a = b \\ a > b \\ a < b \end{cases}$$

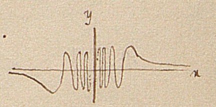
$$(y^2 + x^2)^2 - 4ax^2y - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0$$

Courbes drôles:

$$y^2 = \cos\frac{y}{x}$$

$$y = \frac{a\sin x}{x}$$

$$y = a\sin\frac{b}{x}$$



$$(y^2 + x^2)^2 + 2c^2(y^2 - x^2) = a^4 - c^4 \quad \begin{cases} a = c \\ a > c \\ a < c \end{cases}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{x(x-a)(x-b)}{x+a}} \quad a > 0,\ b > 0 \quad \begin{cases} a = b \\ a > b \\ a < b \end{cases}$$

$$x^4y^4 + (x^2 - 4)(y - x)^4 = 0$$

$$\rho = a + \cos\frac{3\omega}{2} \quad \begin{cases} a > 1 \\ a = 1 \\ a < 1 \end{cases}$$

$$\rho = 2a\cos\omega \pm b.$$

$$(x + y)\{x^2 + y^2 + a(x + y)\} - axy = 0 \quad (\theta = 90°)$$

1293. On donne un angle droit et un point dans l'intérieur de cet angle. On mène par ce point des sécantes. Trouver le lieu des milieux de ces sécantes. — Construire la courbe directement.

1294. Construire

$$\rho = a\left(1 - \sin\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\rho = a \sin 2\omega$$

$$\rho = \frac{a \sin\omega}{1 - \operatorname{tg}\omega}$$

$$(\rho - R)^2 - R^2\omega^2 + a^2 = 0$$

$$\rho = \frac{1}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$$

$$\rho = \frac{1}{\cos^2\omega}$$

$$\rho = \frac{1}{\cos 3\omega - \sin 3\omega}$$

$$x^2 y = y^2 x + 1$$

$$y = \frac{a^2}{x} \pm \sqrt{a(a+x)}$$

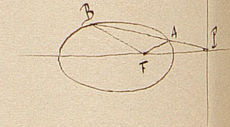
$$y = \pm\sqrt{x\left(3 - x \pm 2\sqrt{2-x}\right)}$$

$$y = \sin 2x$$

$$y^2 - 2xy + y + x^2 - x - 1 = 0$$

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0$$

1295. Au point P, pied de la directrice, on mène une sécante, on joint FA, FB. Trouver la relation qui existe entre les inclinaisons AFP, BFP.
D'abord, y en a-t-il une ?



1296. Trouver les côtés égaux d'un triangle isocèle dont on connaît la base et dont l'angle au sommet est le tiers d'un des angles à la base.

1297. Construire

$$\rho = \frac{a}{\cos^2\frac{\omega}{2}}$$

Trouver la tangente à cette courbe. — Elle est indépendante de a. — Comment pouvait-on le prévoir ?
Trouver le lieu des projections du pôle sur ces tangentes.

1298. Discuter la courbe

$$y = -x + \sqrt[3]{x^3 + x}$$

Le centre est sur la courbe. — Cela arrive-t-il toujours dans les courbes de degré impair ? { oui, car si l'on transporte l'origine au centre, les termes de plus haut degré ne changent pas, donc.... c q f d.

1299. Mener par un point une tangente à une courbe de degré m.

1300. Maximum de

$$\sqrt[m]{x} + \sqrt[m]{2a - x}$$

1301. Décomposer

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}$$

et

$$\frac{1}{x^2(x+1)}$$

en fractions simples.

1302. Lieu des milieux des cordes menées par un point à l'hyperbole. — En déduire l'équation des diamètres.

1303. Mener analytiquement un cercle passant par un point donné, et tangent à deux cercles donnés.

1304. Équation générale des hyperboles équilatères qui ont une directrice et un point commun.

1305. Construire

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

chercher les asymptotes, le centre.

1306. Lieu des sommets des hyperboles dont on connaît une asymptote et un foyer.

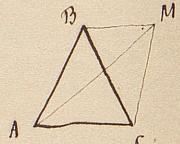
Démontrer que la courbe jouit de cette propriété qu'en

menant par le foyer une corde terminée à l'asymptote, cette ligne est divisée en deux parties égales par l'axe des y (ne serait-ce pas, par la courbe ?)

(α) ou bien
$$2\sqrt[3]{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} = 20$$
Posant $\sqrt[3]{x^2} = z$
$$z = \frac{3 \pm \sqrt{169}}{4} = \begin{cases} +4 \\ -0{,}25.10 \end{cases}$$
et
$$x = \pm\sqrt[2]{z^3} = \begin{cases} \pm 8 \\ \pm 0{,}125\sqrt{-1} \end{cases}$$
4 valeurs, deux imaginaires.

1307. Trouver les Solutions de l'Equation
$$2x\sqrt[3]{x} - 3x\sqrt[3]{\tfrac{1}{x}} = 20. \quad (\alpha)$$

1308. On donne un triangle équilatéral ABC. Lieu des points M tels que
$$MA.MB.MC = m^3.$$

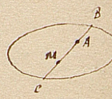


Coordonnées polaires. – Prendre pour pôle le centre du cercle inscrit, et pour axe l'un des rayons aboutissant à un sommet du triangle. On prendra pour unité le rayon de ce cercle. – Trouver l'Eq. de la tangente à la courbe.

Lieu des points M tels que
$$\overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + \overline{CM}^2 = a^2$$
Même système. – On trouve un cercle.

1309. Sur chaque demi-diamètre d'une Ellipse on porte, à partir du centre, une longueur égale à son conjugué. – Lieu des extrémités.

1310. Quelle doit être la longueur du côté d'un carré pris pour unité pour que la surface d'un rectangle et son périmètre soient exprimés par un même nombre. $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$



1311. A étant un point fixe, on prend CM = BA. Lieu des points M. {Ellipse semblable. – Facile en prenant pour axes le diam. qui passe en A et une parallèle au conjugué, puis exprimant que, si l'on mène $y = mx$, on a $y = y_1 + y_2$, $x = x_1 + x_2$}

1312. Vérifier que
$$\frac{\pi}{4} = 4.\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{5} - \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{239}$$ Facile.

1313. Eliminer φ entre les deux Equations

$$\left\{ \begin{array}{l} x+y = a^x \sin\varphi \\ x-y = a^x \cos\varphi \end{array} \right\} \qquad 2(x^2+y^2) = a^{2x}$$

et construire la courbe représentée par l'Eq. Résultante.

1314. Dans une Ellipse, on mène un cercle qui la coupe en 4 points. on mène les cordes communes. – Les Bissectrices des angles de ces cordes sont parallèles aux axes. (165)

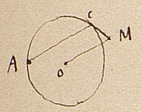
1315. on a deux droites situées d'une manière qcq. dans l'espace. Par tous les points de l'une d'elles, on mène des plans perp. à cette droite. on demande le lieu des milieux des droites joignant les points d'intersection des plans avec les deux droites.
(c'est une ligne droite).

Comp. des prix, Spéciales, 1855, Metz. (Paraboloïde hyperbolique).

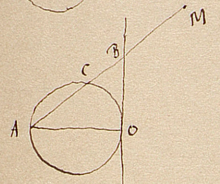
1316. Lieu des points également distants de deux droites situées d'une manière qcq. dans l'espace.

Ritt.

1317. Couper un prisme triangulaire par un plan de manière que la section soit un triangle Equilatéral.

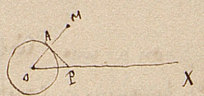


1318. Par un point A donné sur une circonférence, on mène une corde qcq. AC, la tangente en C, et le rayon OM parallèle à AC. Lieu des points M. (4e degré)



1319. on prend BM = AC. – Lieu des points M.

1320. OX est fixe,
OA qcq.
AP tangente.

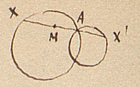


on prend MA = AP. Lieu des points M.

1321. démontrer que, dans un triangle, on a

$$a^2+b^2+c^2 = 4S\,(\cot A + \cot B + \cot C)$$

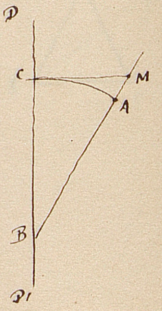
1322. Par le point d'intersection de deux cir.



-conférences, on mène une sécante XX'. On la divise en M dans le rapport $\frac{a}{b}$. Lieu des points M.

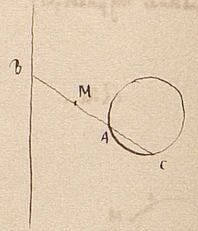
1323. Par un point fixe pris entre les côtés d'un angle, on mène une sécante qcq. Lieu des centres des cercles circonscrits à ces triangles.

1324. Lieu décrit par le sommet d'un angle droit dont les côtés sont tangents à deux circonférences.



1325. Étant donnés un point A et une droite DD', on mène par A une sécante AB. De B comme centre avec AB pour rayon, on décrit un arc de cercle, et par C on mène CM perp. à DD'. Lieu des points M.

2°. (Même figure). Le point M étant fixe, on demande le lieu des points A.



1326. On donne un cercle et une droite. On mène une sécante qcq. On partage AB au point M dans un rapport donné. Lieu des points M.

1327. Lieu des centres des cercles inscrits dans les triangles qui ont même base et même hauteur.

1328. Construire une hyperbole, connaissant une asymptote, deux points, et la tangente en l'un de ces points.

1329. On a une circonférence et une droite. Une droite de longueur constante glisse de façon qu'une de ses extrémités reste sur la circonférence, et l'autre sur la droite. – Lieu décrit par le milieu de cette droite. (4e degré).

Même problème en faisant glisser la droite de longueur constante entre deux circonférences. (id).

1330. On a une parabole, on lui mène deux

normales infiniment voisines. Lieu de leurs intersections successives. (Connu).

1331. Les côtés d'un Triangle étant n, $n+1$, $n+2$, déterminer son espace.

Montrer que, si n augmente, il diffère de moins en moins d'un Triangle équilatéral. Facile, et assez joli.

1332. Trouver la Relation qui doit exister entre les coefficients de

$$x^3 + px + q = 0$$

pour que

1°. une Racine $=$ m f. une autre.

2°. " " $=$ une autre $+ n$.

3°. deux Racines soient égales et de signes contraires.

(x) On a d'abord $x = -a$. Supprimant cette racine, il reste $x^4 + a^2x^2 + a^4 = 0$ qui donne les racines imaginaires.

1333. Résoudre

(x) $$x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5 = 0 \qquad \{ x^6 - a^6 \neq 0$$

1334. Résoudre

$$x^3 + px^2 + \frac{p^2}{3}x + q = 0 \qquad \begin{cases} \left(x+\frac{p}{3}\right)^3 - \frac{p^3}{27} + q = 0 \\ x = -\frac{p}{3} + \sqrt[3]{\frac{p^3}{27} - q} \end{cases}$$

1335. Résoudre

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Tg} 5a = m \operatorname{Tg} a \\ \sin 5a = m \sin a \end{array}\right\} \text{ cas où } m = 1$$

1336. L'Éq.

$$x^5 - px + q = 0$$

peut-elle avoir toutes ses Racines Réelles ?

1337. Trouver les Diviseurs Réels du 2^d degré de

$$x^4 - px^2 + q = 0$$

quand $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

1338. Éq. aux carrés des Différences des Racines de

$$x^6 + 1 = 0.$$

1339. Décomposer $\frac{a}{b}$ dans la somme de deux fractions dont les dénominateurs soient premiers entre eux.
application: $\frac{a}{b} = \frac{17}{30}$.

1340. abaisser le degré d'une Éq. connaissant le rapport de deux racines, — la différence de deux racines.

1341. on a

$$x^3 + px + q = 0.$$

Relation entre p et q pour que

$$x' = \frac{1 - x''}{x''}$$

et résoudre.

1342. abaisser une Éq. sachant que la somme de deux racines est égale à la somme de deux autres.
application:

$$x^5 - 18x^4 + 118x^3 - 348x^2 + 457x - 210 = 0$$

1343. Trouver la longueur des bissectrices d'un triangle en fonction des côtés.

1344. Dans quel cas la résultante de deux composantes égales est-elle égale à chacune d'elles?

1345. Résoudre les équations:

$$8x^7 - 26x^6 + 71x^5 + 5x^4 - 65x^3 + 11x^2 + 13x - 3 = 0$$

$$6x^7 - 7x^6 + 2x^5 - 6x^2 + 7x - 2 = 0$$

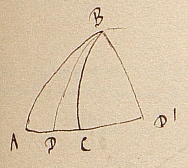
$$4x^6 - 28x^5 + 53x^4 - 9x^2 - 162x + 162 = 0$$

1347. Construire un carré, connaissant la somme de la diagonale et du côté.

1348. Mener à deux circonférences concentriques une sécante telle que le rapport des cordes interceptées soit $\frac{m}{n}$.

1349. Par un point pris dans l'intérieur d'un

Triangle, on mène des parallèles aux côtés : on le partage ainsi en 3 triangles et 3 parallélogrammes. — Démontrer que le produit des surfaces des parallélogrammes est égal à 8 fois le " " " triangles.



1350. Soit ABC un triangle sphérique, BD la bissectrice de B, BD' celle de l'angle extérieur. — On a

$$\frac{\sin BC}{\sin AB} = \frac{\sin CD}{\sin AD} = \frac{\sin CD'}{\sin AD'}.$$

1351. Résoudre

$$\sin\frac{x}{3} = \cos\frac{x}{5}.$$

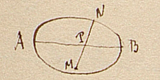
$\left\{\begin{array}{l}\sin\frac{x}{3} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{5}\right). \text{ or, pour} \\ \text{que deux arcs aient même sinus,} \\ \ldots \text{ donc etc.}\end{array}\right.$

1352. Discuter et construire

$$\rho = \frac{\operatorname{tg} 3\omega}{\operatorname{tg}^3 \omega}$$

1353. Lieu des points dont le produit des distances aux sommets d'un polygone régulier est constant.

1354. Lieu des centres des hyperboles équilatères passant par les sommets d'un triangle rectangle.



1355. AB étant le grand axe, on prend sur la normale PM = NP. Lieu des points M. (*)

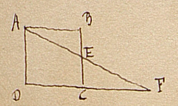
(*). Ellipse. — Éliminer x', y' entre $a^2y'^2 + b^2x'^2 = a^2b^2$, $y - y' = \frac{a^2y'}{b^2x'}(x - x')$, $y = -y'$ on trouve
$$(a^2-2b^2)^2y^2 + a^2b^2x^2 = b^2(a^2-2b^2)^2$$

1356. Soient S_n et S_{n+1} la somme des $n^{ièmes}$ et des $(n+1)^{es}$ ~~racines~~ puissances des racines d'une équation. Démontrer que $\frac{S_{n+1}}{S_n}$ a pour limite la plus grande des racines.

1357. Lieu des projections de chaque point d'une ellipse sur le diamètre conjugué de celui qui passe par ce point.

1358. Transformer
$$(3^2 + 5^2)^3$$
dans la somme de deux carrés.

$\left\{\begin{array}{l}\text{On a en général} \\ (x^2+y^2)^3 = (x^2+y^2)^2(x^2+y^2) \\ \quad = x^2(x^2+y^2)^2 + y^2(x^2+y^2)^2 \quad \text{c q f d.}\end{array}\right.$



1359. On a un carré. — Mener AF tel que EF = a.

1360. Trouver à l'aide du compas seul une distance

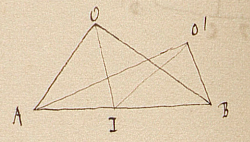
double, triple, .. d'une longueur donnée. | C'est aisé : car on peut, avec la longueur donnée comme rayon, décrire une circf. et trouver deux sommets opposés de l'Hexagone régulier inscrit. |

1361. Dans un triangle un côté quelconque est à la somme des deux autres, comme leur différence est à la somme ou la différence des segments déterminés sur le 1er. côté par la hauteur correspondante.

1362. Extraire

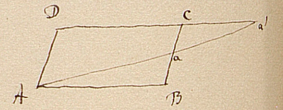
$$x = \sqrt[3]{\sqrt{2}\,(1+\sqrt{-1})} \qquad \text{on a } x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt{-2}-\sqrt{2}\right)$$

1363. Soient AOB, AO'B deux triangles rectangles en O et O'. I étant un point quelconque de l'hypoténuse, démontrer que l'on a



$$\operatorname{tg} IOA \times \operatorname{tg} IO'B = \text{Const}^t. \qquad (\text{N. } 1548).$$

1364. On a un parallélogramme. Par A on mène une transversale qcq. Prouver que



$$aB \times a'D = \text{Const}. \qquad (\text{voir } 1512)$$

1365. Construire

$$y = \frac{x^2(a+x)}{a-x}$$

trouver l'asymptote, et le point le plus élevé de la courbe.

1366. Démontrer que

$$\frac{(x^m-1)(x^{m-1}-1)(x^{m-2}-1)}{(x-1)(x^2-1)(x^3-1)}$$

est toujours entier. (Evident : car, de m, m-1, m-2, un est m.2 et un, m.3)

1367. Trouver l'arc dont la tangente est $x+1$ et qui vaut 3 fois l'arc dont la tangente est $x-1$. (1515)

1368. Construire

$$900y^2 - 30x^3 + x^4 = 0$$

1369. Mener une tangente commune à un cercle et à une parabole dont le sommet est au centre du cercle. } assez facile par le calcul. on cherch. l'ordonnée du point de contact avec la Parabl.

1370. Relations entre a, b, c pour que les deux courbes $cy^2 = x^3$, $y^2 = ax + by$ soient tangentes.

1371. Le produit des perpendiculaires abaissées d'un point qq. de l'hyperbole sur les asymptotes est égal à

$$\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

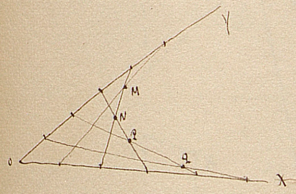
1372. Lieu des centres des cercles inscrits dans les triangles qui ont même base et même hauteur.

facile en se rappelant que $r = \frac{S}{p} = \frac{bh}{2p}$, et que la distance d'un sommet A au point de contact est $p-a$. } 1373. Lieu des centres des cercles inscrits dans les triangles obtenus en joignant un point d'une ellipse aux deux foyers.

Ellipse.

1374. Lieu des sommets des triangles qui ont même base et même cercle inscrit.

1375. Démontrer que, dans un quadrilatère gauche, la somme des carrés des côtés égale la somme des carrés des diagonales, plus 4 fois le carré de la droite qui joint leurs milieux. (facile)



1376. On prend sur les deux côtés d'un angle quelconque deux séries de longueurs égales. — On joint les points de division comme l'indique la figure. Démontrer que les points M, N, P, Q sont sur une parabole (~~tangte aux deux droites~~).

Propositions diverses,

tirées de la Géométrie de Bobillier.

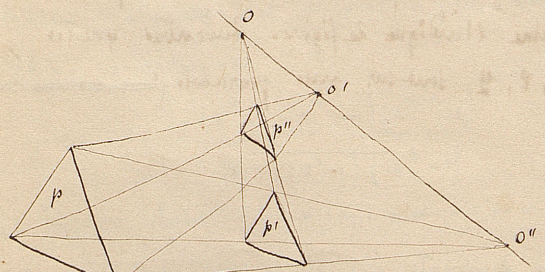
1377. Lorsque les diagonales d'un quadrilatère sont égales, les médianes sont parallèles aux bissectrices des angles formés par les diagonales.

1378. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont leurs quatre côtés égaux.

1379. Un polygone de n côtés a $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonales.

1380. Tout polygone convexe a au plus 3 angles aigus.
Car, s'il en avait davantage, les angles extérieurs correspondants seraient obtus, et la somme des angles extérieurs dépasserait quatre angles droits.

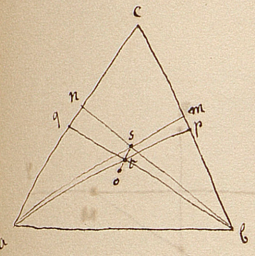
1381. Les trois centres de similitude de deux trois polygones semblables et semblablement placés, sont en ligne droite.



Désignons par p, p', p'' les 3 polygones, et par o'', o', o les centres de similitude de p et p', de p et p'', de p' et p''. — Soit x le point du polygone p homologue du centre o des polygones p' et p''. Les points o et x, étant à la fois homologues par rapport aux polygones p et p', et par rapport aux polygones p et p'', la droite ox qui les joint devra passer par le centre o'' et par o'. Donc c.q.f.d.

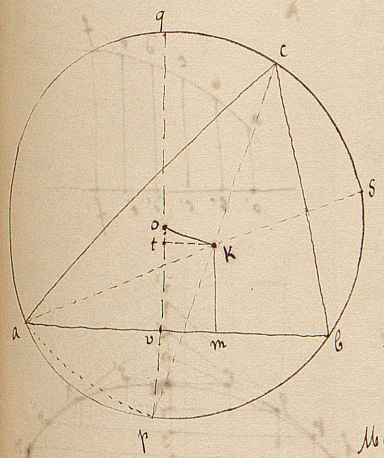
1382. La somme des carrés des diagonales d'un quadrilatère est double de la somme des carrés des médianes.

1383. Dans tout triangle, le point de concours des hauteurs, celui des médianes, et le centre du cercle circonscrit, sont en ligne droite.



Comme $tp = \frac{ta}{2}$, $\frac{tq}{} = \frac{tb}{2}$, si l'on prolonge la droite st de $to = \frac{ts}{2}$, les droites po, qo seront respectivement parallèles à am, bn. Donc o est le centre du cercle circonscrit.

1384. La distance des centres des cercles circonscrit et inscrit à un triangle, est moyenne proportionnelle entre R et R−2r.



On a arc ap = arc bp
arc cs = arc bs

D'où

$$\frac{1}{2}(ap + cs) = \frac{1}{2} ps$$

Donc angle akp = angle akp

$$pk = ap$$

or $ap^2 = pq \times pv$. Donc

$$pk^2 = 2op \times pv$$
$$= 2op \times (pt - tv)$$

Maintenant, le triangle okp donne

$$ko^2 = \overline{op}^2 + pk^2 - 2op \cdot pt$$

Substituant la valeur de pk^2, il vient

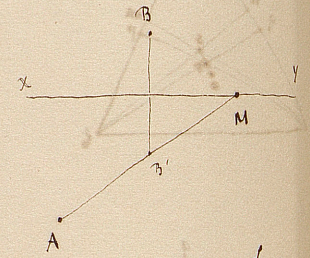
$$ko^2 = op^2 - 2op \times tv.$$
$$= op\,(op - 2tv)$$
$$= R\,(R - 2r) \qquad \text{cqfd.}$$

Scolie. — On aurait de même, pour les cercles ex-inscrits:

$$d'^2 = R(R + 2r') \quad d''^2 = R(R + 2r'') \quad d'''^2 = R(R + 2r''')$$

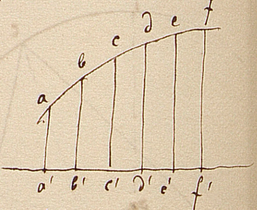
1385. Dans tout quadrilatère inscrit les bissectrices des angles formés par les côtés opposés sont bien parallèles aux bissectrices des angles des diagonales.

1386. Deux angles circonscrits à deux circonférences sont égaux lorsqu'ils ont pour sommet commun un point de la circonférence qui a pour diamètre la distance des centres de similitude.



1387. Le point M est celui de la droite XY dont la différence des distances aux deux points A et B est maximum.

1388. Deux trapèzes sont égaux lorsqu'ils ont leurs quatre côtés égaux.

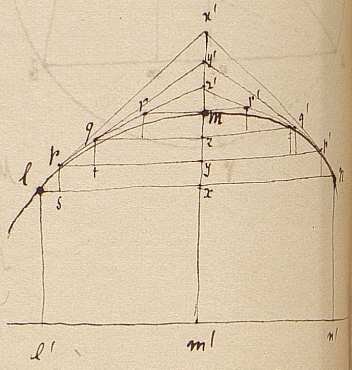


1389. Trouver l'aire d'une courbe, comprise entre l'axe des x et deux ordonnées.

Il est facile de voir que c'est approximativement

$$\left(\frac{aa'+ff'}{2}+bb'+cc'+dd'+ee'\right)\cdot\frac{a'f'}{5}$$

Solution plus approchée.



Considérons trois points, l, m, n, très-voisins, sur la courbe, dont les projections l' m' n' sur l'axe des x soient équidistantes. Prolongeons mm' de mx' = mx, et divisons xx' en un nombre pair de parties égales, par exemple en six. Tirons :

1°. les droites lx', nx', et par le point y la droite pp' parallèle à ln ;

2°. Les droites py', p'y', et par le point z la droite qq' parallèle à pp' ;

3°. Les droites qz', q'z', et par le point m la droite rr' parallèle à qq'.

Nous formerons ainsi une ligne brisée lpqrr'q'p'n qui passera par les points l, m, n, et dans laquelle on aura (comme xl = xn) yp = yp', zq = zq', mr = mr'.

Lorsque les divisions de xx' sont très nombreuses, les côtés les côtés lp, pq, qr... deviennent très-petits, et la ligne brisée se transforme en une courbe qui l'on peut regarder comme se confondant avec la courbe donnée. Dans cette hypothèse, on peut substituer aux trapèzes $lxyp$, $pyzq$, ... les parallélogrammes $sxyp$, $tyzq$, ..., et, parce que ces parallélogrammes sont respectivement doubles des triangles $px'y'$, $qy'z'$, .. il s'ensuit que $lpqrmx = 2\,pqrmx'$. D'où $lpqrmx + pqrmx'$ ou 3 $pqrmx'$ ou $\frac{3}{2}\,lpqrmx$ = Triangle lxx'.

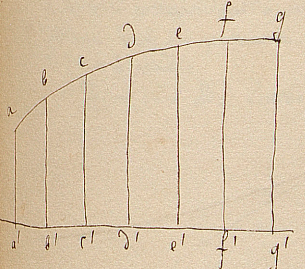
$lpqrmx = \frac{2}{3}$ Tr. $lxx' = \frac{2}{3} mx \times l'm'$.

et partant $lpqrr'q'p'n = \frac{4}{3} mx \times l'm'$.

D'ailleurs Trapèze $ll'n'n = m'x \times 2l'm'$

Donc
$$l'lmnn' = (6m'x + 4mx)\frac{l'm'}{3}$$

Mais $4m'x + 4mx = 4mm'$; $2m'x = ll' + nn'$. Donc
$$l'lmnn' = (ll' + nn' + 4mm')\frac{l'm'}{3}.$$



Présentement, on a

$$aa'c'c = (aa' + cc' + 4bb')\frac{a'b'}{3}$$

$$cc'e'e = (cc' + ee' + 4dd')\frac{a'b'}{3}$$

$$ee'g'g = (ee' + gg' + 4ff')\frac{a'b'}{3}$$

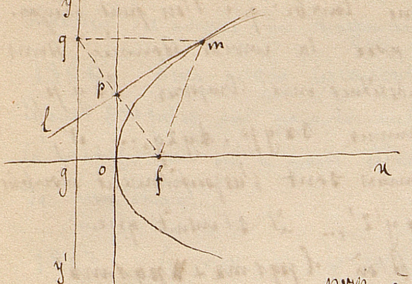
ajoutant, et remarquant que $\frac{a'b'}{3} = \frac{a'g'}{3.6}$, il vient

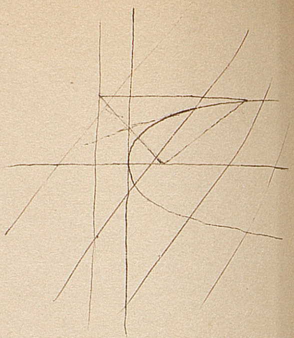
$$agg'a' = \{aa' + gg' + 2(cc' + ee') + 4(bb' + dd' + ff')\}\frac{a'g'}{3.6}$$

D'où :

Diviser la base en un nombre pair de parties égales ; à la somme des perp. extrêmes, ajouter le double de la somme des autres perp. de rang impair, et le quadruple de celle des perp. de rang pair. Multiplier le tout par la base, et diviser par 3 fois le nombre de ses parties égales.

1390. Dans toute parabole, la projection p du foyer f sur une tangente quelconque ml est située sur la tangente au sommet.

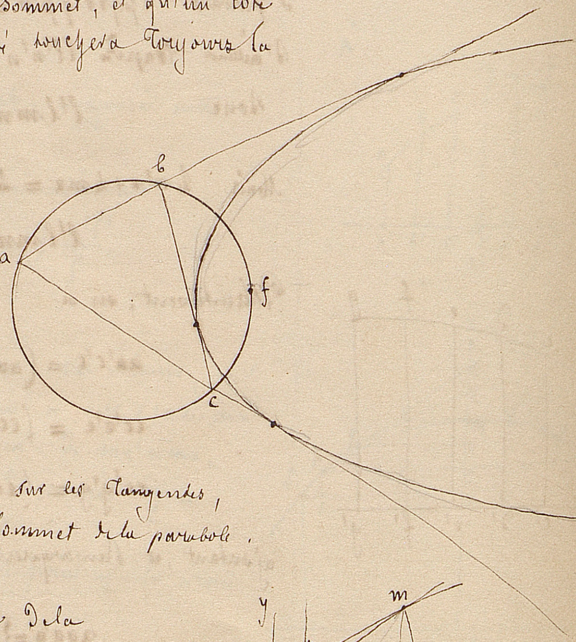




Le triangle fmg étant isocèle, la droite ml est perp. sur le milieu de fg : et, comme $fo=og$, la droite po est parallèle à yy', et par suite perp. à ox. Donc elle touche la parabole au sommet o.

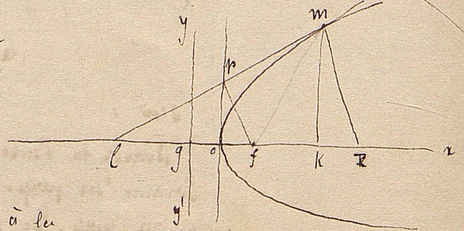
Scolie I. Si un angle droit se meut de manière que son sommet reste sur la tangente au sommet, et qu'un côté passe toujours par le foyer, l'autre côté touchera toujours la parabole.

Scolie II. Si un triangle est circonscrit à une parabole, la circonférence circonscrite à ce triangle passe par le foyer.



En effet, on sait que si, d'un point de la circ. circonscrite à un triangle, on abaisse des perp. sur les 3 côtés, leurs pieds sont en ligne droite. et réciproquement.
Or, si, du foyer, on abaisse des perp. sur les tangentes, leurs pieds sont sur la tangente au sommet de la parabole. Donc ...

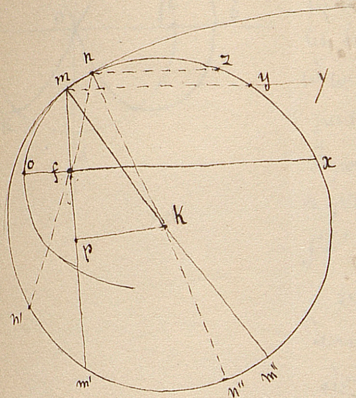
Coroll. I. Le sommet o est le milieu de la sous-tangente kl.
Le triangle mfl étant isocèle, on a $mf=fl$, et partant $mp=pl$ et $ok=ol$.



Coroll. II. La sous-normale kr est égale à la moitié fg du paramètre.
Car $lm=2lp$, donc $mr=2pf$, et $kr=2fo=fg$.

1391. Dans toute Parabole, le foyer f est le milieu de la projection mp d'un Rayon de courbure quelconque mk sur le Rayon vecteur correspondant fm.

Soient my, nz deux parallèles à l'axe, m et n étant infiniment voisins.



on a

$$\text{angle } nfo = fnz = 2.fnk$$

et

$$mfo = \dots = 2.fmk$$

Retranchant

$$mfn = 2(fnk - fmk)$$

d'où

$$\frac{m'n' + mn}{2} = n'n'' - m'm''$$

$$= m'n' - m''n''$$

$$= m'n' - mn$$

$$m'n' + mn = 2m'n' - 2mn$$

$$m'n' = 3.mn$$

Donc, à cause de la similitude des triangles $fm'n'$ et fmn, on a aussi

$$fm' = 3\,fm \text{ ou } 3\,fn.$$

et partant

$$mm' \text{ ou } 2mp = 4\,fm$$

$$mp = 2\,fm$$

$$fp = fm. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Rem. Il est facile de voir que $my = mm'$. Donc $my = 4\,mf$ c.à.d. my = le paramètre relatif au diamètre mY (un mot illisible). — Donc le Th. revient à celui-ci :

Théorème. — Le cercle osculateur en un point m de la parabole coupe le diamètre correspondant à une distance égale au paramètre relatif à ce diamètre.

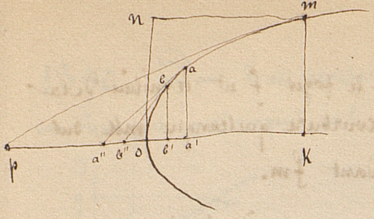
Ce Th. est dû à Mac-Laurin.

Scolie. Cette proposition donne un moyen fort élégant pour construire le Rayon de courbure en un point quelconque.

Celui du sommet o est égal au $\frac{1}{2}$ paramètre, $2fo$.

1392. L'aire d'un segment parabolique omk, est égale aux $2/3$ du Rectangle $okmn$ de même base ok et de même hauteur km.

Si l'on prend $op = ok$, la droite mp est la tangente du point m. — Pareillement, si l'on tire



les ordonnées aa', bb' et les tangentes aa'', bb'', de deux points a et b infin^t. voisins, il vient $oa' = oa''$, $ob' = ob''$, et par suite $a'b' = a''b''$. ainsi le petit trapèze $abb'a'$ est double du petit triangle $aa''b''$. — Donc

$$\text{Segm}^t.\ omk = 2\ \text{fig.}\ omp.$$

ou

$$\text{Segm.}\ omk = \frac{2}{3}\ \text{triangle}\ pmk$$

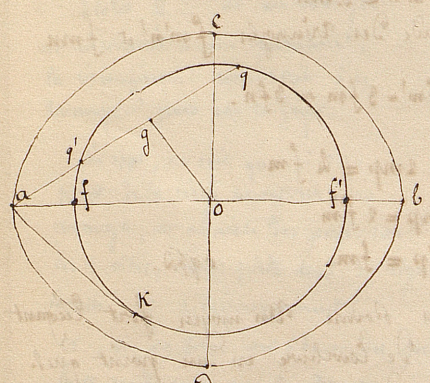
$$= \frac{2}{3}\ ok \times km. \qquad \text{c.q.f.d.}$$

1393. L'ovale de Cassini.

C'est le lieu des points dont les distances à deux points fixes f, f', font constamment un même produit.

Il y a deux axes, et un centre.

Les deux sommets a et b se trouvent aisément, ainsi que c et d.



Décrire l'ovale de Cassini.

Je décris la circonférence auxiliaire of, et, par le sommet a, je tire à volonté la sécante aq. on a

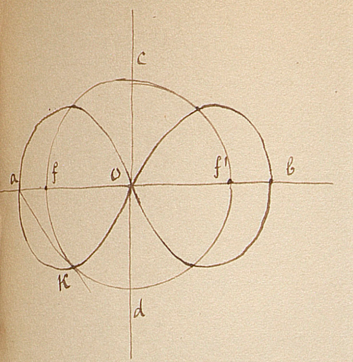
$$aq.aq' = af.af'.$$

Donc avec les rayons aq et aq', d. et f et f' pris comme centres, j'aurai 2 points de la courbe.

Formes diverses de la courbe.

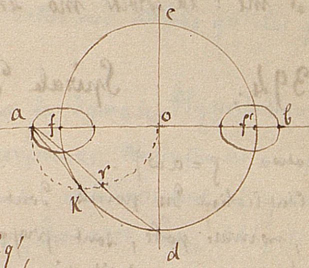
1°. Si $of <$ tangente ak, toute sécante aq produira 2 points de l'ovale, et les rayons vecteurs des ~~rayons~~ sommets c et d seront égaux à ak.

2°. Si $of = ak$, ces deux sommets se réuniront au centre



o, et la courbe prendra la forme d'un 8.

3°. Si $of > ak$, soit tirée ~~on ne pourra pas se servir de toutes les sécantes~~, on ne peut se servir de toutes les sécantes, parce que les circonférences ne se coupent pas toujours.



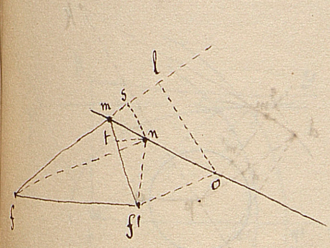
Reportons-nous en effet à la première figure. — Comme $ff' > gg'$, ou que $fg - fg'$, il suffira, pour que les circonférences se coupent deux à deux, que l'on ait $ff' < ag + ag'$, ou $of < ag$.

Donc ici, soit tirée une corde $ar = of$ dans la circonf. dont ao est le diamètre : on ne pourra se servir que des sécantes comprises entre ar et ab, et la courbe prend la forme de deux ovoïdes séparées.

4°. Enfin, si $of < ak$ mais $of > \frac{ak}{\sqrt{2}}$, la courbe a 2 points d'inflexion.

Rem. La courbe coupe toujours la circonférence of en ses points les plus élevés.

Problème. Mener la tangente en un point de l'ovale de Cassini.



Soit mn un élément de cette courbe ; rabattons fn en fs et $f'n$ en $f't$ au moyen des petits arcs ns et nt. Nous aurons $fn = fm + ms$, $f'n = f'm - mt$, et partant

$$(fm + ms)(f'm - mt) = fm \times f'm.$$

Effectuant, simplifiant, et négligeant $ms \times mt$, il vient

$$fm \cdot mt - f'm \cdot ms = 0$$

ou
$$\frac{fm}{f'm} = \frac{ms}{mt}$$

Tirons maintenant $f'o$ perp. à $f'm$, et ol perp. à fm, les quadrilatères $mf'ol$, $mtns$ sont visiblement semblables, et partant $\frac{ml}{f'm} = \frac{ms}{mt}$. Donc $ml = fm$.

Donc, pour déterminer la tangente du point m, on prolongera fm d'une quantité égale à, ml; aux points f' et l on élevera des perp. f'o et lo sur fm' et ml : la droite mo sera la tangente cherchée.

1394. Spirale d'archimède.

(Equation $\rho = a\omega$).

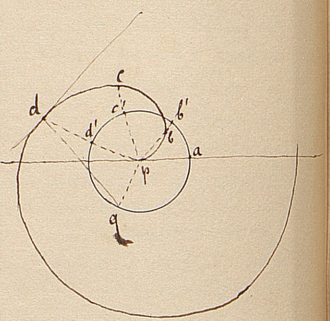
C'est le lieu des points dont les distances à un point fixe, nommé pôle, sont proportionnelles aux angles qu'elles forment avec une droite fixe.

Problème. – Décrire la Spirale d'archimède.

Je divise circonférence pa (de Rayon = a) en petites p parties égales ab', b'c', c'd',... Puis, sur les Rayons pb', pc', pd',.. je prends pb = arc ab'.

pc = arc ac' = 2 arc ab'

etc.

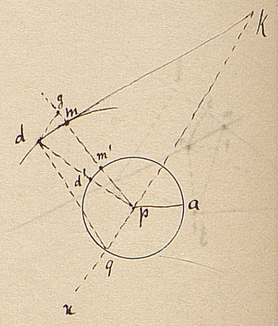


La ligne pbcd.. est la Spirale demandée.

Elle fait autour du pôle une infinité de circonvolutions équidistantes.

Scolie. – Le Rayon pa est dit le Paramètre.

Théorème. – La Sous-normale pq, estimée sur la perp. pa au Rayon vecteur pd, est égale au paramètre pa (fig. 1 et 2).



Soit dm un petit Elément de la Courbe. Rabattons pd en pg, par l'arc dg, de manière que

$$mg = pd - pm = ad' - am' = d'm'.$$

Les deux triangles semblables gmd, pdq donnent

$$\frac{dg}{mg} = \frac{pd}{pq}. \text{ Mais } \frac{dg}{d'm'} = \frac{pd}{pd'}$$

Donc $pq = pd' = pa$.

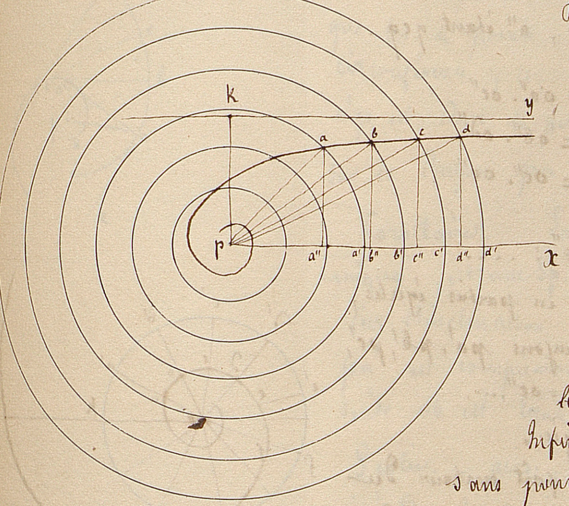
D'où la construction facile de la tangente.

1395. **Spirale Hyperbolique.**

C'est le Lieu des points dont les distances au Pôle sont inversement proportionnelles aux angles qu'elles forment avec une droite fixe.

Problème. — Décrire la Spirale Hyperbolique.

Je décris une série de circonférences concentriques au pôle p, et je prends arbitrairement, à partir du rayon px, des arcs aa', bb', cc', dd'... égaux entre eux. La ligne abcd.. est la Spirale cherchée.

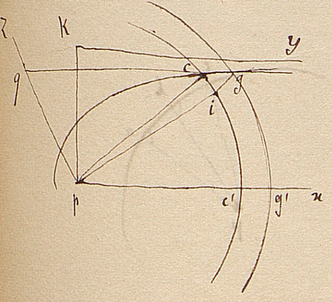


En effet, si l'on considère deux points quelconques a et b, on a

$$\frac{\text{angle } bpx}{\text{angle } apx} = \frac{bb'}{pb} : \frac{aa'}{pa}$$

$$= \frac{pa}{pb} \quad \text{car } aa' = bb'.$$

Cette Spirale s'étend indéfiniment dans les deux sens. D'une part, elle fait une infinité de circonvolutions autour du pôle sans pouvoir l'atteindre; de l'autre, les ordonnées croissantes aa'', bb'', cc''... ne pouvant atteindre les arcs aa', bb', cc',... la Spirale a pour asymptote la droite ky parallèle à px et distante du pôle p de la ligne pk = arc aa'.



pk est le Paramètre de la Spirale.

Théorème. — La Sous-tangente pq estimée sur le Rayon pz perp. à la distance pc, est égale au paramètre pk.

Si cg est un élément, on a cc' = gg'. Or

$$\frac{gg'}{ic'} = \frac{pg}{pi} \quad \text{ou} \quad \frac{gg' - ic'}{pg - pi} = \frac{gg'}{pg} \quad \text{ou} \quad \frac{ci}{gi} = \frac{cc'}{pg}$$

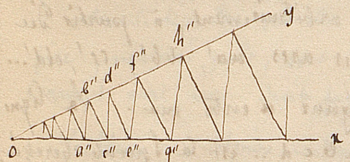
on a aussi $\frac{ci}{gi} = \frac{pq}{pg}$. Donc pq = cc' = pk c.q.f.d.

D'où la construction de la Tangente.

1396. Spirale Logarithmique.

C'est le lieu des points dont les distances à un pôle p croissent en progression géométrique, lorsque les angles qu'elles forment avec une droite fixe croissent en progression arithmétique.

Problème. Décrire la Spirale Logarithmique.

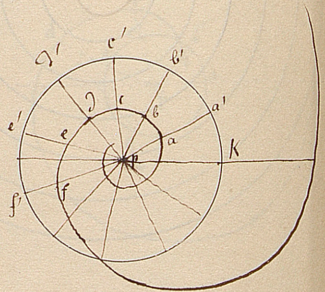


Dans un angle quelconque, j'effectue la construction ci-contre, a'' étant qcq. on a

$$\overline{ob''}^2 = oa''.oc''$$
$$\overline{oc''}^2 = ob''.od''$$
$$\overline{od''}^2 = oc''.oe''$$
$$\vdots$$

d'où
$$\div\ oa'' : ob'' : oc'' : od'' : oe'' : \ldots$$

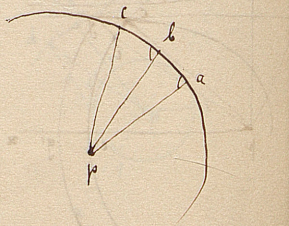
Cela fait, je divise circonférence pk en parties égales, $ka' = a'b' = b'c' = c'd' = \ldots$ et sur les rayons pa', pb', pc', pd', je prends $pa = oa''$, $pb = ob''$, $pc = oc''$, ….



La ligne $abcde$.. est la spirale cherchée.

Elle s'étend dans les deux sens, et fait autour du pôle p, sans pouvoir l'atteindre, une infinité de circonvolutions.

Théorème. Toutes les tangentes sont également inclinées sur les rayons des points de contact.



Soient ab, bc deux éléments consécutifs de la spirale, correspondants aux angles égaux apb, bpc. on a

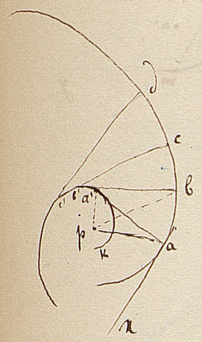
$$\frac{ap}{bp} = \frac{bp}{cp}$$

Donc les deux triangles pab, pbc sont semblables, et angle $pab = pbc$.

Scolie. L'inclinaison constante des tangentes sur les rayons de leurs points de contact est le paramètre de la spirale.

Corollaire. Toutes les normales sont également inclinées sur les Rayons qui leur correspondent. — Car chacune de ces inclinaisons est le complément du paramètre angulaire.

Théorème. Le pôle de la Spirale Logarithmique est la projection d'un centre de courbure quelconque sur le Rayon correspondant.



Soient pa, pb, et aa', bb' les Rayons et les normales de deux points a et b infiniment voisins. Il est évident que les 4 points p, a, b, a' appartiennent à une même circonférence, et, comme l'angle aba' est droit, a'p est donc la perp. abaissée du centre de courbure a' sur le Rayon pa.

Corollaire. La développée a'b'c'... d'une Spirale Logarithmique, est une Sp. Logarithmique égale.

Car l'inclinaison aa'p de la tangente aa' sur le Rayon pa' est complémentaire de l'angle paa', et par suite elle est égale au paramètre angulaire pax.

Scolie. — ainsi, quoique la Spirale a'k fasse une infinité de Révolutions autour du pôle p, l'arc compris entre ce point et l'extrémité a' est égal au Rayon de courbure a'a.

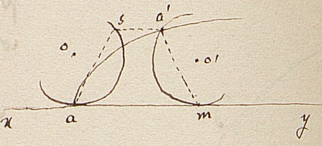
1397. Cycloïdes,

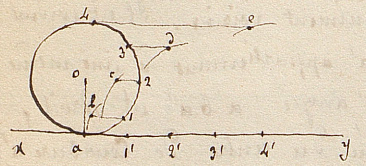
ordinaire, rallongée et Raccourcie.

On appelle Cycloïde la courbe décrite par un point du plan d'un cercle qui roule, sans glisser, sur une de ses tangentes.

La Cycloïde est ordinaire, Rallongée ou Raccourcie suivant que le point décrivant est situé sur la circonférence génératrice, en dedans ou en dehors. — La tangente fixe est la directrice.

La description par points de chacune de ces Cycloïdes n'offre aucune difficulté théorique. –
Pour la cycloïde ordinaire, il y a un moyen de description plus expéditif que celui qui se présente d'abord à l'esprit. En effet, si par le point a' on tire a's parallèlement à xy, on a visiblement arc a'm = arc sa et corde a'm = cord. sa. – D'après cela :

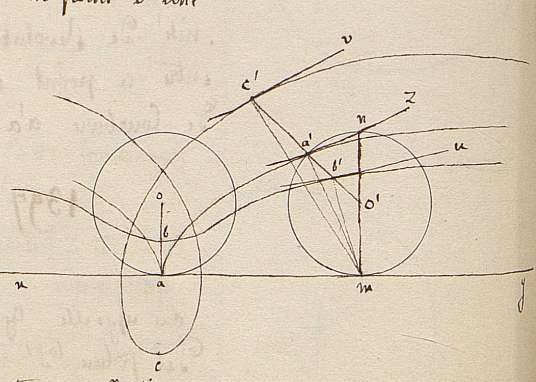




on divise circonférence oa en petits arcs égaux a1, 12, 23, 34, .. que l'on porte sur xy en a1', 1'2', 2'3', ... Des centres 1' 2' 3'.. avec les cordes a1 a2 a3 ... pour rayons, on décrit une série de petits arcs. Les points b, c, d, e, .. où ils sont coupés par les droites 1b, 2c, 3d, .. parallèles à xy, appartiennent à la cycloïde.

Il existe des procédés analogues pour les cycloïdes allongée et raccourcie.

Problème. Construire la tangente en un point d'une cycloïde.



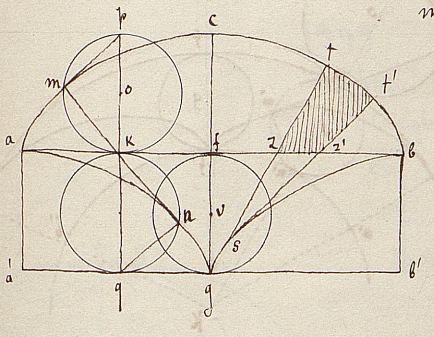
Soient a', b', c' les points qui correspondent au point de contact m. Si l'on fait rouler infiniment peu la circ. o'm, le point m n'éprouve qu'un déplacement insensible, et par suite les 3 points a', b', c' décrivent autour du centre m trois petits arcs circulaires. Mais ces petits arcs se confondent avec les éléments des 3 courbes. Donc les normales des points a' b' c' sont dirigées suivant les rayons a'm, b'm, c'm, et les perp. a'z, b'u, c'v menées à

leurs extrémités, sont les Tangentes demandées.

L'angle maz étant droit, la tangente $a'z$ doit passer par l'extrémité n du diamètre mn.

Corollaire. La normale en un point d'une cycloïde quelconque passe par le point de contact de la Circonférence Génératrice.

Théorème. — La développée d'une Cycloïde ordinaire est une cycloïde égale.



Soient ab la base, et cf l'axe de la Cycloïde engendrée par le point m de circ. OK. Je décris une circonf. sur le diam. $kq = pk$. Par le point g je mène $a'b'$ parallèle à ab ; enfin je tire mkn, mp et nq. Les triangles rectangles pmk, et qnk sont égaux, de là $mp = nq$, et arc mp = arc nq. — Mais il est clair que arc $mp = kf$; donc arc $qn = qg$. ainsi le point n appartient à la Cycloïde ga décrite par le point g de circonf. vg, roulant de droite à gauche sur $a'b'$. De plus, comme la droite mn passe par le point K, elle est à la fois normale en m et tangente en n. — Donc la développée de la première cycloïde est deux demi-Cycloïdes ga et gb.

Corollaire I. — La base ab divise en parties égales tous les Rayons de Courbure de la Cycloïde acb. — Car $Km = Kn$.

Coroll. II. La cycloïde rectifiée est égale à 4 fois le diamètre de la circonférence Génératrice.

Car un fil placé sur gb est égal à gb et égal à gc.

Coroll. III. L'aire de la cycloïde vaut 3 fois celle du cercle Générateur.

Car $st = 2sz$, $st' = 2sz'$. Donc $szz' = \frac{1}{4}\, stt'$, et $tt'zz' = 3.szz'$

Donc Cycl. acb = 3. fig. gab = $\frac{3}{4}$ $gacb$ = $\frac{3}{4}$ Rect. $abb'a'$ =

= $\frac{3}{4}$. Circ. $OK \times \frac{2OK}{[illegible]}$ = ~~3. Circ. OK × $\frac{OK}{2}$~~ = 3. Cercle OK.

1398. Epicycloïdes.

La théorie est toute semblable à celle des Cycloïdes.

Voici seulement un théorème concernant l'Epicycloïde ordinaire.

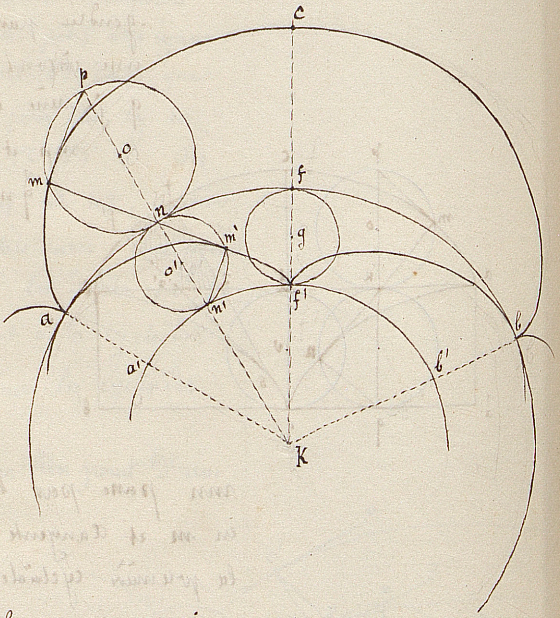
Théorème. La développée d'une Epicycloïde ordinaire est une Epicycloïde semblable.

Soit ab la base et bkc l'arc de l'Epicycloïde engendrée par le point m de circ. on.

Divisons nk au point n' de manière que l'on ait

$$\frac{kn}{kn'} = \frac{np}{nn'}$$

Décrivons ensuite circ. $o'n'$ et l'arc $a'b'$. Tirons enfin les droites mnm', mp, $m'n'$.



Les arcs nf, $n'f'$ étant semblables, on a

$$\frac{nf}{n'f'} = \frac{kn}{kn'} \text{ ou } = \frac{np}{nn'}$$

Les angles inscrits égaux mnp, $m'nn'$ interceptant des arcs semblables, on a aussi

$$\frac{\text{arc } mp}{\text{arc } m'n'} = \frac{np}{nn'}.$$

Donc

$$\frac{\text{arc } mp}{\text{arc } m'n'} = \frac{nf}{n'f'}$$

or, de ce que arc mn = an, il suit arc mp = nf.

Donc arc $m'n'$ = $n'f'$.

Ainsi le point m' appartient à l'Epicycloïde $f'a$ décrite par le point f' de circ. gf' roulant sur $a'b'$.

De plus, la droite mm' est tangente au point m'

m' de cette courbe, et normale au point m de la courbe acb. Donc la 1re. courbe est la Développée de la Seconde.

Les deux Epicycloïdes sont semblables en vertu de l'Egalité

$$\frac{kn}{kn'} = \frac{np}{nn'} \quad \text{ou} = \frac{on}{o'n'}.$$

Coroll. I. — La Base ab divise en parties proportionnelles tous les Rayons de courbure de l'Epicycloïde acb.

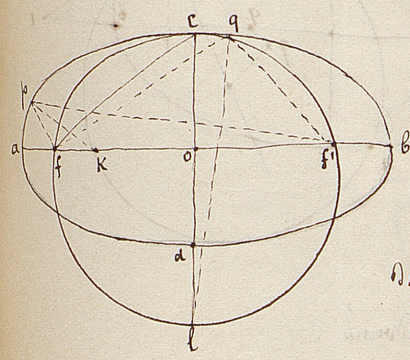
Car on a

$$\frac{mn}{m'n} = \frac{np}{nn'}.$$

Coroll. II. — La Droite cf' est égale à l'arc af' rectifié.

1399.

Théorème. — Les Courbures A et C aux Sommets a et c d'une Conique sont proportionnelles aux cubes des Demi-axes oa et oc.



Parce que la Normale pk est la Bissectrice de l'angle fpf', on a

$$fk : f'k :: fp : f'p$$

or, si le point p est très-près de a, fp = fa, f'p = f'a. Donc

$$fk : f'k :: fa : f'a.$$

Donc a, f, k, f' sont harmoniques, et l'on a aussi

$$oa.\, ok = of^2.$$

ou

$$oa(oa - ka) = fc^2 - oc^2$$

et, comme oa = fc, $\quad ka = \dfrac{\overline{oc}^2}{oa}.$ (1)

De plus: — la circonférence fcf' touchant l'ellipse en c, la normale ql du point très-voisin q doit diviser l'angle f'qf, et aussi l'arc f'lf, en deux parties égales. Donc $\quad lc = \dfrac{fc^2}{oc}$ ou $lc = \dfrac{oa^2}{oc}$ (2)

On a donc

$$A : C :: \frac{oa^2}{oc} : \frac{oc^2}{oa}$$

ou

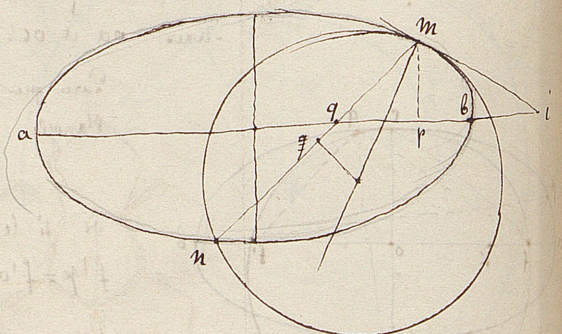
$$A : C :: oa^3 : oc^3 \qquad \text{cqfd.}$$

1200.

Lemme. — Lorsqu'une conique est coupée en quatre points par une circonférence, les bissectrices des angles formés par les cordes qui joignent ces points deux à deux, — sont parallèles aux axes.

Connu. (Démontré n°. 165).

Problème. — Décrire le cercle osculateur au point m d'une conique.

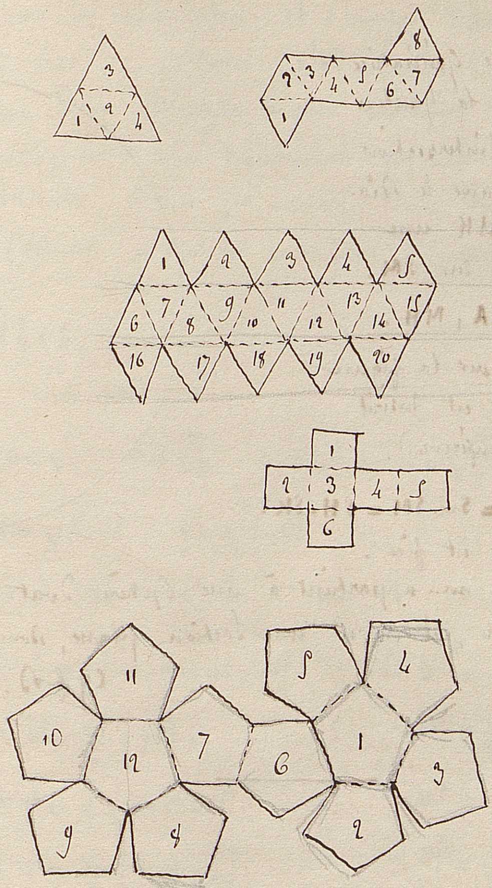


Cette circonférence, ayant avec la conique trois points communs infinimt. voisins, doit la couper en un quatrième point n. La tangente mi du point m et la corde mn, pouvant être considérées comme des cordes qui unissent ces quatre points deux à deux, devront être également inclinées sur l'axe ab.

De là cette construction :

On mène la tangente mi du point m, et l'ordonnée mp. On prend pq = pi, et l'on tire mq qui coupe la conique en n. — Par les points m, n, on fait passer une circ. tangente à mi. C'est le cercle osculateur.

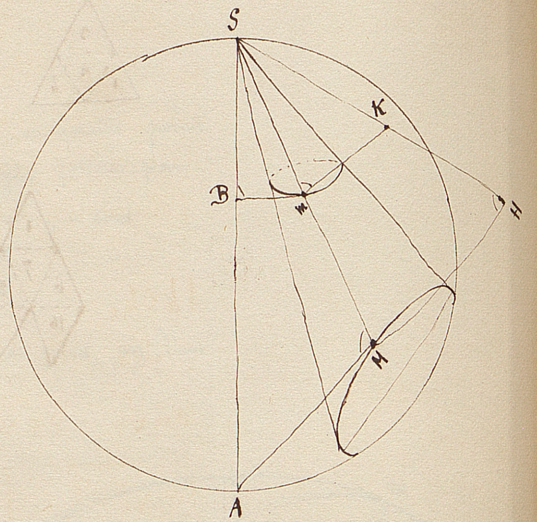
1401. Voici les développements des surfaces des cinq polyèdres réguliers.



390

1402.

Toute section antiparallèle du cône circulaire oblique est un cercle.



Soit SMm une génératrice quelconque, SH la hauteur du cône, B l'intersection du plan sécant avec le diamètre SA, et MK une droite perp. en m sur SM. on joint mB, MA, MH. Les angles marqués sur la figure sont droits (SMA est inscrit dans une demi-circonférence).

Donc $SB.SA = Sm.SM = SH.SK.$

Donc le point K est fixe.

Donc la section m.. appartient à une sphère dont SK est le diamètre, et en est une section plane, donc

C.q.f.d.

1403. Le point A se meut sur une droite perp. sur le milieu de BC ; le point a se meut de même sur une perp. au milieu de bc. Les triangles ABC, abc, sont dans un même plan, et l'angle BAC est toujours égal à bac. — L'axe radical des deux cercles circonscrits aux deux triangles a pour enveloppe deux points fixes ; l'un correspondant aux mouvements qui ont lieu dans un sens, et l'autre, à ceux qui ont lieu dans ~~des~~ le sens opposé. (Steiner. — chercher une sol. géométrique).

1404.

Soit posé :

$a=\sqrt{\frac{1}{2}}$ $b=\sqrt{\frac{3}{2}}$ $c=\sqrt{\frac{5}{2}}$ $d=\sqrt{\frac{15}{2}}$

$e=\sqrt{5+\sqrt{5}}$ $f=\sqrt{5-\sqrt{5}}$ $g=\sqrt{3}+1$ $h=\sqrt{3}-1$

on a les sinus de 3° en 3° :

$\sin 3^\circ = \frac{1}{8}(-a-b+c+d-eh)$

$\sin 6^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}(f\sqrt{3}-c-a)$

$\sin 9^\circ = \frac{1}{4}(a+c-f)$

$\sin 12^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}(b-d+e)$

$\sin 15^\circ = \frac{1}{2}(-a+b)$

$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(-a+c)$

$\sin 21^\circ = \frac{1}{8}(a-b+c-d+fg)$

$\sin 24^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}(b+d-f)$

$\sin 27^\circ = \frac{1}{4}(-a+c+e)$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\sin 33^\circ = \frac{1}{8}(-a-b+c+d+eh)$

$\sin 36^\circ = \frac{1}{4} f\sqrt{2}$

$\sin 39^\circ = \frac{1}{8}(a+b+c+d-fh)$

$\sin 42^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}(a-c+e\sqrt{3})$

$\sin 45^\circ = a$

$\sin 48^\circ = \frac{\sqrt{2}}{8}(-b+d+e)$

$\sin 51^\circ = \frac{1}{8}(-a+b-c+d+fg)$

$\sin 54^\circ = \frac{\sqrt{2}}{4}(a+c)$

$\sin 57° = \frac{1}{8}(-a+b+c-d+cg)$ $\sin 75° = \frac{1}{2}(a+b)$

$\sin 60° = \frac{1}{2} b\sqrt{2}$ $\sin 78° = \frac{\sqrt{2}}{8}(-a+c+e\sqrt{3})$

$\sin 63° = \frac{1}{4}(-a+c+e)$ $\sin 81° = \frac{1}{4}(a+c+f)$

$\sin 66° = \frac{\sqrt{2}}{8}(a+c+f\sqrt{3})$ $\sin 84° = \frac{\sqrt{2}}{4}(b+d+f)$

$\sin 69° = \frac{1}{8}(a+b+c+d+fh)$ $\sin 87° = \frac{1}{8}(a-b-c+d+eg)$

$\sin 72° = \frac{1}{4}(e\sqrt{2})$ $\sin 90° = 1$

on peut calculer toutes ces lignes au moyen des 3 sinus

$\sin 18°$, $\sin 30°$, $\sin 45°$.

Car $\sin 48° = \sin(18° + 30°)$, $\sin 3° = \sin(48° - 45°)$, etc.

1405. Démontrer :

$\sin 75° - \sin 45° = \sin 45°$

$\sin 15° . \sin 75° = \frac{1}{4}$

$\operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 60° = 2$

$\operatorname{tg} 75° - \operatorname{tg} 60° = 2$

$\operatorname{tg} 15° + \operatorname{tg} 75° = 4$

$\sin 54° - \sin 18° = \frac{1}{2}$

$\sin 54° . \sin 18° = \frac{1}{4}$

$\operatorname{tg} 18° + \sec . 18° = \operatorname{tg} 54°$

$\sin 54° + \sin 18° = \frac{3}{4}$

$\cos 54° + \cos 18° = \frac{5}{8}$

$\sec . 30° = \frac{4}{3} \sin 60°$.

1406. On donne deux tétraèdres, ABCD, A'B'C'D' tels que les droites AA', BB', CC', DD', qui joignent deux à deux les sommets correspondants, concourent en un même point. — Démontrer que si les faces correspondantes se coupent, les quatre droites d'intersection sont situées dans un même plan.

(Conc. Gén. 1853 — Log. Sc.)

1407. Etant donnés sur une carte quatre points non en ligne droite, tracer sur cette carte une route circulaire qui passe à égale distance de ces 4 points.

(id. id. — 3e. Sc.)

1408. Division pratique de la circonférence en parties égales.

Diviser le diamètre AB en autant de parties égales qu'on veut en avoir sur la circonférence. Des points A et B comme centres, et avec AB pour rayon, décrire deux arcs qui se coupent en C, puis, si le nombre des divisions est < 8, joindre le point C à la seconde division du diamètre à partir de l'extrémité: l'arc BD sera la portion demandée de la circonférence. — Si le nombre des divisions est pair et $\equiv 8$, mener par C deux sécantes passant par le centre et par la seconde division à partir du centre. L'arc qu'elles interceptent est l'arc demandé.

1209. # Dérivées
de quelques fonctions.

1°. Rappelons d'abord que

$$\frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = x_1^{m-1} + x x_1^{m-2} + \dots + x^{m-1}$$

m étant entier et >0. — Si l'on fait $x_1 = x$, on arrive

$$\text{Lim.}\ \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = \text{dérivée de } x^m = m x^{m-1}$$

En général $\text{Dériv. de } ax^m = \text{Lim. } a \times \frac{x_1^m - x^m}{x_1 - x} = max^{m-1}$.

2°. La dérivée de $\text{Log}\,x$ est par définition, la limite de

$$\frac{\text{Log}(x+h) - \text{Log}\,x}{h}$$

ou de

$$\frac{\text{Log}\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h}$$

ou de

$$\frac{\text{Log}\,(1+\alpha)}{\alpha x}$$

en posant $h = \alpha x$, α et h étant infiniment petits en même temps.

Or les progressions Logarithmiques

$$1 : 1+\alpha : (1+\alpha)^2 : \dots$$
$$0 . k\alpha . 2k\alpha . \dots$$

donnent, par définition

$$k\alpha = \text{Log}(1+\alpha)$$

quel que soit α. Donc

$$\text{Dériv. de } \text{Log}\,x = \frac{k\alpha}{\alpha x} = \frac{k}{x}.$$

Maintenant, comme $k = \frac{\text{Log}(1+\alpha)}{\alpha} = \text{Log}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, il

s'ensuit que $(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ est la base du système logarithmique dont le module $k = 1$, et, en la désignant par e, nous aurons

$$k = \text{Log}\, e.$$

3°. Il est évident que la dérivée de $\text{Log}(1+x)$ est $\frac{k}{1+x}$, puisque, en remplaçant $1+x$ par y, on serait ramené au cas précédent. — Or, une simple division de 1 par $1+x$ donne

$$\frac{k}{1+x} = k\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right)$$

pour dérivée de $\text{Log}(1+x)$. Donc, réciproquement,

$$\text{Log}(1+x) = k\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)$$

4°. On a

$$\text{Tg}\, x_1 - \text{Tg}\, x = \frac{\sin x_1}{\cos x_1} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin(x_1 - x)}{\cos x_1 \cos x}$$

Donc la dérivée de l'arc x par rapport à $\text{Tang}\, x$ ou la limite de $\frac{x_1 - x}{\text{Tg}\, x_1 - \text{Tg}\, x}$ égale la limite de

$\frac{x_1 - x}{\sin(x_1 - x)} \times \cos x_1 \cos x$ ou $\cos^2 x$ ou $\frac{1}{\sec^2 x}$ ou $\frac{1}{1+u^2}$

en posant $u = \text{Tg}\, x$.

5°. En divisant 1 par $1+u^2$, cette dérivée devient

$$1 - u^2 + u^4 - u^6 + \cdots$$

Donc réciproquement, l'arc Tang u ou x égale

$$u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} - \cdots$$

Si l'on fait $u = \frac{1}{5}$, cette série donnera la valeur d'un arc α correspondant. Mais

$$\text{Tg}\, 2\alpha = \frac{5}{12} \qquad \text{Tg}\, 4\alpha = \frac{120}{119}$$

et $$\operatorname{tg}\left(4\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

et, si l'on pose $u = \frac{1}{239}$, la série précédente donnera la valeur de $4\alpha - \frac{\pi}{4}$: donc

$$4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \dots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} \dots\right)$$

1410. — Le Calendrier Persan fut réformé dès l'an 1079, sous le Règne du Sultan Malik-Chah, par Alkhayyâmî.

On rend bissextile la 4e année 7 fois de suite ; mais, la huitième fois, c'est la 5e année qui a 366 jours, de sorte que c'est une Intercalation de 8 jours sur 33 ans. (Erreur : une minute environ en 100 ans).

1411. — Sur les annuités.

La formule Générale des annuités est

$$x = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}.$$

Si l'on ne tenait aucun compte des intérêts, pas même des intérêts simples, il est clair que la valeur de l'annuité serait

$$\frac{A}{n}.$$

Problème : L'annuité est-elle plus grande ou plus petite si l'on tient compte des intérêts, que si on les néglige ?

$$x \gtrless \frac{A}{n} \ ?$$

Posons
$$\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1} \gtrless \frac{A}{n}$$

D'où
$$nr(1+r)^n \gtrless (1+r)^n - 1$$

ou bien

$$nr \gtrless 1 - (1+r)^{-n}$$ faux

$$nr \gtrless 1 - \left\{ 1 - nr + \frac{n(n-1)}{1.2} r^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} r^3 + \cdots \right\}$$

$$0 \gtrless - \left\{ \frac{n(n-1)}{1.2} r^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} r^3 + \cdots \right\}$$

or je dis que la quantité entre crochets est positive. En effet, remarquons d'abord que le produit nr est toujours inférieur à 1 dans les applications ordinaires, où n ne dépasse guères 10, et r est au plus égal à 0,05. Maintenant, chaque terme entre crochets s'obtient en multipliant le précédent par une expression de la forme $\frac{n-p}{p+1} r$, qui est plus petite que nr (1), et à fortiori que l'unité. Donc ces termes vont en diminuant. Donc toutes les soustractions peuvent s'effectuer, et l'on a

$$0 \gtrless -k^2$$

ce qui donne

$$0 > -k^2$$

Donc

$$x > \frac{A}{n}$$

ce qu'il est aisé de vérifier par des exemples.

(1) $\frac{n-p}{p+1} < n$
$n-p < np+n$
$0 < (n+1)p$

Rem. – Ce résultat est donc vrai toutes les fois que $nr < 1$. – Si maintenant $nr \equiv 1$, la dernière inégalité de la page précédente a lieu évidemment avec le signe $>$.
Donc le résultat est complètement général.

Problèmes divers

tirés des

Récréations Mathématiques

d'Ozanam.

arithmétique.

1412. Divers arrangements de jetons de manière qu'en en ôtant, on en trouve toujours le même nombre dans chaque rangée :

(1)			(2)			(3)			(4)		
1	7	1	2	5	2	4	1	4	3	3	3
7		7	5		5	1		1	3		3
1	7	1	2	5	2	4	1	4	3	3	3

1413. On a mené sur le bord d'une rivière un loup, une chèvre et un chou. On propose à un batelier de les passer seul à seul, de manière qu'en son absence le loup ne fasse aucun mal à la chèvre, et que la chèvre ne touche pas au chou.

Le batelier passe la chèvre. Il revient prendre le loup le passe, et ramène la chèvre. Il passe le chou. Enfin il revient prendre la chèvre.

1414. Trois maris jaloux se trouvent avec leurs femmes pendant une nuit fort obscure, au passage d'une rivière. Ils rencontrent un bateau sans batelier, lequel ne peut contenir que deux personnes. Comment les six personnes passeront-elles, de sorte qu'aucune femme ne demeure seule avec deux hommes, si son mari n'est présent.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

Voici la solution

It duplex mulier, redit una, vehitque manentem;
Itque una, utuntur tunc duo puppe viri.
Par vadit et redeunt bini; mulierque sororem
advehit : ad propriam fine maritus abit.

1415. De deux nombres quelconques, l'un des deux, ou leur somme, ou leur différence, est divisible par 3.

1416. Si deux nombres sont tels que la somme de leurs carrés soit un carré parfait, leur produit est divisible par 6.

Pour trouver deux nombres dont la somme des carrés soit un carré parfait, prenez les nombres $2xy$ et x^2-y^2, x et y étant quelconques.

(car $(x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = x^4+y^4+2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2$.

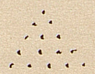
1417. La somme et la différence de deux nombres quelconques dont les carrés diffèrent d'un nombre carré, sont chacune ou un carré ou la moitié d'un carré.

Pour trouver deux nombres dont la somme et la différence soient chacune un carré, auquel cas les carrés de ces deux nombres différeront aussi d'un carré, prenez $2xy$ et x^2+y^2, x et y étant qcq.

Pour trouver deux nombres dont la somme et la différence soient chacune la moitié ou le double d'un carré, auquel cas leurs carrés diffèrent aussi d'un carré, prenez x^2+y^2 et x^2-y^2.

1418. Pour qu'on puisse extraire la racine carrée d'une fraction $\frac{a}{b}$, il faut et suffit que ab soit un carré parfait.

1419. Il est possible de trouver deux nombres triangulaires dont la somme et la différence soient aussi des nombres triangulaires. _ ainsi sont 15 et 21 ; 780, 990.


15 (côté 5)

21 (côté 6)

Pour connaître si un nombre proposé est triangulaire, il faut le multiplier par 8, et ajouter 1 au produit : la somme doit être un carré parfait.

Car $1+2+3+\cdots+n = $ ~~[illegible]~~ $= \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

$$\frac{n^2+n}{2}\cdot 8 + 1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$$

Pour avoir le côté d'un nombre triangulaire, il faut prendre la moitié de la racine carrée prise par défaut.

1420. Soit la progression

$$\div\ 1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13 \cdot 16 \cdots$$

Les sommes 1, $1+4$, $1+4+7$, $1+4+7+10$, etc. s'appellent des Nombres Pentagônes.

On a

$$(1+4+7+10+\cdots+n)\,24+1 = m^2.$$

En effet, soit p le nombre des termes :

$$1+4+7+10+\cdots n = \frac{[1+(1+\{p-1\}3)]\,p}{2} = \frac{(3p-1)p}{2} = \frac{3p^2-p}{2}$$

$$\frac{3p^2-p}{2}\cdot 24+1 = 36p^2-12p+1 = (6p-1)^2 = m^2 \text{ c.q.f.d.}$$

Ce qui sert à trouver si un nombre donné est pentagône.

1421. La somme de n nombres triangulaires est

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}.$$

1422. La somme des fractions

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\cdots$$

dont les dénominateurs sont les nombres triangulaires, est 1.

1423. On a

~~$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = 1+(1+2)+(1+2+3)+(1+2+3+4)+\cdots(1+2+3+\cdots+n\ [illegible])$~~

~~$= [illegible]$~~

$$1^2+2^2+3^2+\cdots n^2 = [1+(1+2)+(1+2+3)+\cdots(1+2+3+\cdots+n)]\,2 - (1+2+3+\cdots+n)$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{6}n(n+1)\{2n+2-3\}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n-1)}{2.3}$$

1424. On a

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\dots+n^3 = p^3$$ et p est un nombre triangulaire.

D'où :

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = (1+2+3+4+\dots n)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{36}$$

1425. Les produits de 37 par

	3	6	9	12	15	18	21	24	27
sont	111	222	333	–	–	–	–	–	999

1426. Un Nombre parfait est égal à la somme de ses diviseurs. — Pour les avoir, prenons

2, 4 | 4, 8 | 16, 32 | 64, 128 | 256, 512 | 1024, 2048 | ..

Les produits

2. 3 | 4. 7 | 16. 31 | 64. 127 | 256. 511 | 1024. 2047 | ..

sont des nombres parfaits.

1427. Les nombres 120 et 672 sont égaux à la moitié de la somme de leurs diviseurs. — Il y en a d'autres.

1428. Les nombres 220, 284 sont amiables, parce chacun d'eux = la somme des diviseurs de l'autre (les nombres eux-mêmes étant exceptés).

1429. La somme de deux nombres consécutifs est égale à la différence de leurs carrés : et la somme des carrés de leurs nombres triangulaires (le n. tr. de n est $1+2+\dots+n$) est aussi un nombre triangulaire.

1430. $\frac{n^4-n^2}{2}$ et $\frac{n^4+n^2}{2}$ sont des nombres triangulaires, dont les côtés diffèrent de 1, et dont la somme et la différence sont des carrés ; la somme de leurs carrés est un nombre ~~bicarré~~ triangulaire, dont le côté est un nombre bicarré.

{car $\left(\frac{n^4-n^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{n^4+n^2}{2}\right)^2 = \frac{n^8+n^4}{2} = \frac{n^4(n^4+1)}{2}$ = un nombre triangulaire dont le côté est n^4 }.

Les deux nombres triangulaires ainsi trouvés sont encore

Tels que le plus grand de leurs côtés est toujours un carré ; que la différence de leurs carrés en est un ; que leur somme est un bi-carré, égal au carré de leur différence, et au côté du nombre triangulaire que compose la somme de leurs carrés.

1431. La différence des carrés de deux nombres doubles l'un de l'autre est égale à la somme de leurs cubes divisée par la somme des deux nombres : et la même somme des cubes est le tiers d'un cube.

1432. Des triangles rectangles en nombres entiers.

Le plus petit de tous est 3, 4, 5. – La somme des cubes des côtés 27 + 64 + 125 est un cube 216, dont la racine 6 est l'aire du triangle.

Pour avoir des triangles rectangles en nombres, prenez

$$2xy \qquad x^2 - y^2 \qquad x^2 + y^2$$

Les nombres x et y sont les nombres générateurs.

$x = 2$	$y = 1$	on aura	3	4	5
$x = 3$	$y = 2$	"	5	12	13
$x = 5$	$y = 2$	"	20	21	29
$x = 12$	$y = 5$	"	119	120	169
$x = 29$	$y = 12$	"	696	697	985
$x = 70$	$y = 29$	"	4059	4060	5741
$x = 169$	$y = 70$	"	23660	23661	33461

etc. On voit qu'avec la loi qu'on suit pour x et y, les côtés diffèrent de 1 unité.

Si les nombres x et y diffèrent de 1, le plus grand côté et l'hypothénuse seront deux nombres consécutifs.

Exemples :

x = 2	y = 1	3	4	5
x = 3	y = 2	5	12	13
x = 4	y = 3	7	24	25
x = 5	y = 4	9	40	41
x = 6	y = 5	11	60	61
x = 7	y = 6	14	84	85

1433. Des Carrés magiques.

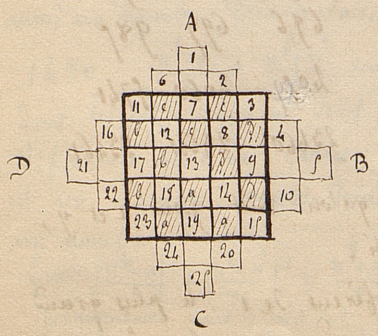
1°. Des Carrés magiques Impairs, formés par des Termes en progression arithmétique.

En voici un

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

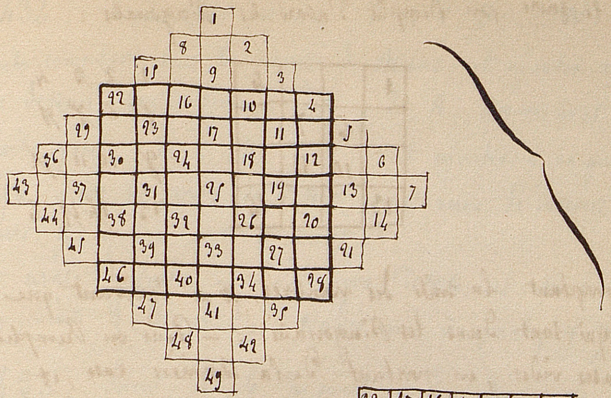
Dans tout Carré magique Impair, la somme des nombres de chaque Rang ou de chaque Diagonale est égale au produit de la Racine du carré par le terme moyen de la progression : ici, c'est 5 x 13.

Pour le construire, voici la Marche à suivre :



on fait la figure ABCD, puis, on place les 3 cases A dans celles opposées et vides a a a, et de même des autres.

En voici un autre exemple :



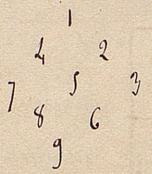
22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

on peut avoir d'autres dispositions en commençant par une autre case unique hors du carré.

on peut employer une série quelconque de nombres en progression arithmétique.

Il y a du reste bien d'autres dispositions différentes.

application. — disposer les 9 premières cartes, depuis l'as jusqu'au neuf, de manière que la somme des points de chaque rang soit toujours la même :



d'où

4	9	2
3	5	7
8	1	6

2°. des carrés magiques pairs formés par des termes en progression arithmétique.

Le quarré 4 ne peut être disposé magiquement.

Le quarré 16 peut l'être, et est le plus facile.

Pour le faire, on remplit d'abord les diagonales :

1			4
	6	7	
	10	11	
13			16

1 2 3 4
5 6 7 8
9 10 11 12
13 14 15 16

en comptant la suite des nombres, et n'écrivant que ceux qui sont dans les diagonales. — Puis on remplit les cases vides, en partant de la dernière case, et comptant en sens inverse.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

16 15 14 13
12 11 10 9
8 7 6 5
4 3 2 1

Les autres (36, 64..) ne peuvent se faire par des règles simples.

3°. Des carrés magiques géométriques. — Les termes sont ceux d'une progression géométrique, et c'est le produit qui est constant. — Ils se font de même.

4°. Voici enfin un carré de neuf cases, dont les 3 nombres de chaque rang, en long, en travers, ou en diagonale, sont en proportion harmonique :

a	$\frac{2ac}{a+c}$	c
$\frac{2ab}{a+b}$	$\frac{2bc}{b+c}$	$\frac{2abc}{2ab+ac-bc}$
b	$\frac{2abc}{2ac+ab-bc}$	$\frac{abc}{ab+ac-bc}$

1434. Faites jeter n dés, $A, B, C, D, \ldots N$.
Faites compter tous les points de dessus, et ajouter ceux de dessous, sauf ceux de dessous de A, qu'on met à part.
Faites jeter $B, C, D \ldots N$; et ajouter à ce qu'on a déjà tous les points de dessus, puis ceux de dessous exc. pour B qu'on met à part.
et ainsi de suite. — La somme totale est la somme des points de dessus des n dés mis à part, $+7n$.

1435. Soient a, b les points de deux dés, $a > b$
$a'\ b'$ ceux de dessous. $a' < b'$

1°. Faites vous donner $(2a+5)5+b$ et retranchez 25. Il vient $10a+b$, donc un nombre de deux chiffres, qui sont a et b.

2°. Faites vous donner $(a'+b')$ ~~et $(a-b')$~~ $(b'-a')$.
on a ~~$b \pm (a'+b') \pm (b'-a')$~~ $b = \frac{14 - \{(a'+b')+(b'-a')\}}{2}$ et
~~$a \pm (a'+b') \ldots (b'-a')$~~ $a = \frac{14 - \{(a'+b')-(b'-a')\}}{2}$
car $a+a'=7$ et $b+b'=7$.

3°. ou bien demander $a+b$ et ab'.

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{a+b \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab'}}{2}$$

1436. a, b, c trois dés.
Demandez $\{(2a+5)5+10+b\}10+c$. et retranchez 350 : il viendra $100a+10b+c$.

1437. Deviner un nombre pensé a.
1°. Demander a^2+2a+1. La racine carrée est $a+1$.
2°. Demander $(a-1)2-1+a = N$. $a = \frac{N+3}{3}$
3°. Demander $(a-1)3-1+a = N$. $a = \frac{N+4}{4}$
4°. Demander $(a+1)2+1+a = N$. $a = \frac{N-3}{3}$

5°. Demander $(a+1)\cdot 3+1+a=N$. $a=\frac{N-4}{4}$

6°. Demander $(a-1)2-1-a=N$. $a=N+3$.

7°. " $(a+1)2+1-a=N$. $a=N-3$.

8°. " $(a-1)3-1-2a=N$. $a=N+4$.

9°. " $(a+1)3+1-2a=N$. $a=N-4$.

10° Faites prendre $3a$. puis $\frac{3a}{2}$ si c'est possible, sinon $\frac{3a+1}{2}$. Puis faites tripler. Demander combien le résultat contient de fois 9 : soit n. $a=2n$, ou $2n+1$ si l'on a pris $\frac{3a+1}{2}$. — Si $n=0$, $a=1$.

Pour se faire dire n, faites ôter 27, ou 36, ou 18, ou 9 etc. autant de fois que l'on pourra.

11°. Demander $(a+1)(a-1)=N$. $a=\sqrt{N+1}$.

12°. " $(a+1)a-a=N$. $a=\sqrt{N}$.

13°. " $(a-1)a+a=N$ $a=\sqrt{N}$.

14°. " $(3a+1)3+a=N$. $a=\frac{N-3}{10}$

15° " $(3a-1)3+a=N$ $a=\frac{N+3}{10}$

1438. Trouver ce qui reste après quelques opérations, sans rien demander. — a le nombre pensé, n un nombre que vous choisissez à volonté, sans le dire.

1°. $\frac{2a+2n}{2}-a=n$. — on peut alors au lieu de dire n, demander $a-n$ ou $n-a$ et en déduire a.

2°. $\frac{2a-2n}{2}$. puis $a-\frac{2a-2n}{2}=n$.

3°. $(a+n)a-a^2=an$. d'où $a=\frac{an}{n}$.

4°. $\frac{(a-n)+(a+n)}{2}=a$..

1439. Trouver plusieurs chiffres pensés.
$a, b, c, d, e, \dots$

Soient 4 nombres, a, b, c, d.

$$\left[\left[\left\{\left((2a+1)5+b\right)2+1\right\}5+c\right]2+1\right]5+d-555 = 1000a+100b+10c+d$$

1440. Une personne tient dans une main A un nombre pair de jetons, dans l'autre B, un nombre impair. Deviner dans quelle main est le nombre pair.

Soient a et b. — Multiplier a par $2n$; b par $2p+1$ et ajouter, puis faire prendre la moitié. Si c'est possible, b est pair; sinon, b est impair.

1441. Une personne a dans chaque main N jetons. Deviner combien.

	main droite	main gauche
	N	N
n quelconque.	$N-n$	$N+n$
	$2(N-n)$	$N+n-(N-n)=2n$.

or vous connaissez $2n$. Demander donc combien la main G. contient de plus que la D. vous en conclurez le nombre total. — ou bien, demander l'excès de $2n$ sur N.

1442. Un père laisse en mourant sa femme enceinte. Il ordonne que, si elle a un garçon, il aura les 2/3 de son bien, qui est de 3000 louis, et la mère l'autre 1/3. Si elle a une fille, celle-ci n'aura que 1/3 et la mère 2/3. La mère accouche d'un garçon et de deux filles.

R. Le garçon, 1500 louis, la mère 750, et chaque fille 375 louis.

1443. Une personne a passé le 1/2 de sa vie dans l'en-

-fance, 1/5 dans la jeunesse, 1/3 dans l'age mur, et il y a 13 ans qu'elle est dans la vieillesse. — Quel age a-t-elle ?

60 ans. —

1444. Deux personnes prennent alternativement des nombres inférieurs à n, et qui s'ajoutent : quel est le moyen d'arriver le premier à N ?

Soit r le reste de la division de N par n. Celui qui veut gagner doit commencer par r, et arrivera ensuite à N en s'arrêtant aux nombres

r, $r+n$, $r+2n$, $r+3n$, etc.

1445. Il reste toujours une marche quand on monte un escalier 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4 et 5 à 5. Combien y en a-t-il ?

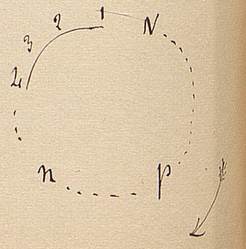
1446. 3 femmes au marché vendent l'une 10 pommes, la 2e. 25, la 3e. 30. Elles les vendent simultanément, et le même prix la pomme. — Elles rapportent toutes trois la même somme. — Est-ce possible ?

Oui, en admettant deux ventes, faites à des prix différents, et le problème est indéterminé.

par exemple:

10	1 pomme à 2 sous	et	9 à 7 sous	= 65
25	22 " 2		3 " 7	= 65
30	29 " 2		1 " 7	= 65

Il y a d'autres solutions, qui donnent 30 sous, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65 et 70.



1447. Prenez un jeu de cartes, de N cartes, et placez-les en rond, en donnant un no. à chacune

Dites à quelqu'un d'en penser une avec son numéro, soit p. Puis dites-lui de mettre le doigt sur une autre carte quelconque n, et alors, faisant en vous-mêmes la somme $n+N$, dites-lui de compter à partir de n, et dans le sens de la flèche, jusqu'à $n+N$, en attribuant à la première carte n la valeur de celle p qu'elle a pensée. — On tombera justement sur la carte p.

1448. Faites prendre à A $4n$ cartes, à B, $7n$ et à C, $13n$, en leur laissant choisir n sans le savoir vous-même. Que C, B et A doublent successivement le nombre des cartes de chacun. À la fin, ils en auront tous $2 \cdot 8n$.

$4n$	$7n$	$13n$
$8n$	$14n$	$(13-7-4)n = 2n$
$16n$	$(14-8-2)n = 4n$	$4n$
$(16-4-4)n = 8n$	$8n$	$8n$

cq. fd.

1449. Présentez trois cartes A, B, C à 3 personnes, qui en prennent chacune une comme elles veulent. Donnez à la première personne le nombre 12,

" 2e " " 24,

" 3e " " 36.

puis dites à l'une d'elles d'ajouter la moitié du nombre de celle qui a pris A, le tiers du nombre de celle qui a pris B, et le quart du nombre de celle qui a pris C. Et demandez-lui la somme : — elle sera 23, 24, 25, 27, 28, ou 29. alors

le Tableau suivant donne la solution :

Sommes	1ère pers. (12)	2e p. (24)	3e pers. (36)
23	A	B	C
24	A	C	B
25	B	A	C
27	C	A	B
28	B	C	A
29	C	B	A

Vers mnémoniques : c.à.d.

Trois abbés de bonne grâce, 3 AB ....
Ou quatre, dans les temps passés, 4 ... p.AC
De St. Bacchus suivant la trace 5 BAcchus.
S'étaient en triste cas placés. 7aient ... CA..
Puis, nez baissé, se soulagèrent 28, nez BC, ...
Neuf fois : c'est Beau ; ~~pour~~ lors se couchèrent. 9. C'est Beau.

1450. Dans un Jeu de cartes, prenez-en n à volonté, et montrez-les par ordre, en commençant par celle de dessous, et les mettant l'une sur l'autre. Puis dites de se souvenir du nombre de la carte pensée. – après cela, remettez les n cartes (vous seul connaissez n) dans une situation contraire, en remettant sur le reste du jeu la carte qui aura été mise la 1ère sur la table, et finissant par la dernière. Puis, ayant demandé le nombre p de la carte pensée, comptez p, $p+1$, $p+2$, .. jusqu'à n, et vous tomberez sur la carte pensée.

1451. Dans un jeu de N cartes, faites prendre n cartes, et attribuer à chacune des valeurs quelconques, à vous inconnues, $a, b, c, \dots h$. – Soit $a+b+c+\dots+h = x$. Dites alors d'ajouter sur chacune autant de cartes

qu'il faut pour compléter le nombre p quelconque. (par ex. si $a=8$, et $p=15$, il faudra ajouter 7 cartes). Et demander combien il reste de cartes R.

Le nombre des cartes abattues est

$$n + p-a + p-b + p-c + \dots + p-h$$

ou

$$n + np - (a+b+c+\dots+h) = (p+1)n - x$$

Donc

$$R = N - (p+1)n + x$$

$$x = R - \{N - (p+1)n\}$$

$x = R - \{N - (p+1)n\}$.

1452. On a un vase de 8 litres, plein. En mettre la moitié dans un vase de 5 litres, au moyen d'un vase de 3 litres.

Voici le Tableau des opérations

8 l.	5 l.	3 l.
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3

Si l'on veut que les 4 litres restent dans le plus grand vase:

8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3

Voici la solution du même problème, en supposant qu'on ait un vase plein de 12 litres, et qu'on en veuille

mesurer 6 avec deux vases, de 7 et de 5 litres.

	7 litres	5 litres
12	0	0
7	0	5
7	5	0
2	5	5
2	7	3
9	3	0
4	7	1
11	1	0
6	1	5
6	6	0

1453. 15 Chrétiens et 15 Turcs sont sur un même vaisseau. Tempête. Il faut jeter 15 hommes à la mer. on les range, et en comptant de 9 en 9, chaque 9e est jeté. – Tous les Turcs le sont.

on y arrive par ce vers

Populeam virgam mater Regina ferebat.

4 Chrét. 5 Turcs . 2 Chr. 1 Turc .. etc.
o u e a

1454. Trois personnes prennent comme elles veulent 3 objets A, E, I. – Prenez 24 jetons, et donnez en 1 à la 1ère personne,
" 2 " 2e "
" 3 " 3e "

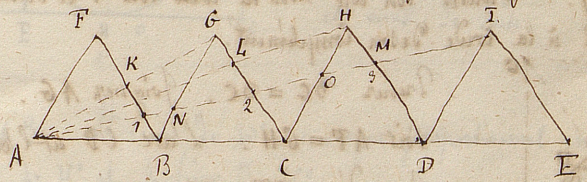
Il en reste 18. Dites que celui qui a pris A prenne autant de jetons que vous lui en avez donné ; celui qui a pris E, 2 fois autant que vous lui en avez donné, et celui qui a pris I, 4 fois autant. – Il restera 1 jeton, ou 2, 3, 5, 6 ou 7. – alors, ce vers latin donne la solution

1er mot 2e 3e .. 5e 6e 7e
Salve certa animae semita vita quies.

S'il reste par ex. 5 jetons, la 1ère personne a E et la 2e I.

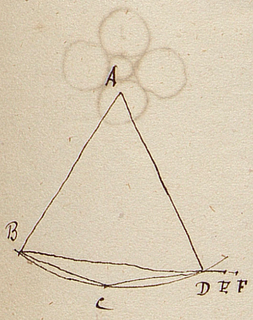
Géométrie.

1455. Démontrer que, dans la figure ci-jointe,



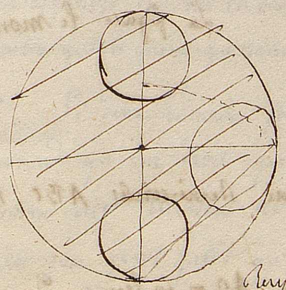
$HM = \frac{1}{4} AB = B1 = \frac{1}{2} C2$ et $D3 = 3/4\, AB$.

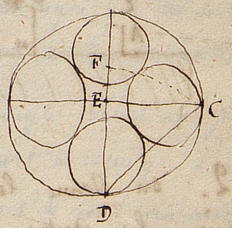
$GL = \frac{1}{3} AB = BN = \frac{1}{2} CO$.



1456. La droite BF = l'arc BCD, si $BE = BC + CD$ et $EF = \frac{1}{3} DE$ (à 0,00001 près, si $A < 30°$).

1457. Décrire la figure :

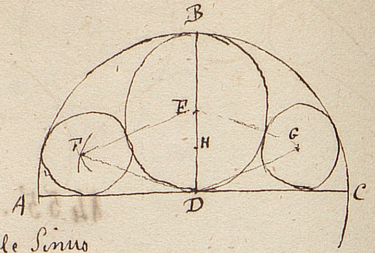




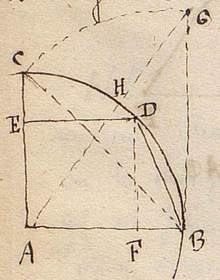
Prenez DF = DC. EF est le rayon des 4 petits cercles qu'il s'agit de décrire.

1458. On donne un demi-cercle. Décrire

Dans son intérieur les trois demi-cercles E, F, G.
Le premier se construit immédiatement.
Pour avoir les autres, F par exemple,
prenez le point H, milieu de DE,
puis FE = FD = BH.

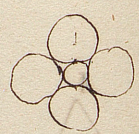


1459. Trouver un arc dont la corde soit & le sinus soit égal à la corde de son complément.

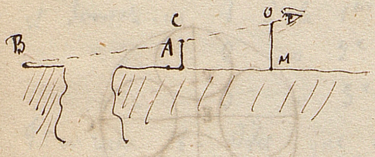


Prenez BG = BC. Joignez AG.
Soit AF = GH. L'arc CD est l'arc demandé : DE = DB.
L'arc CD = 47° 3' 31".

1460. Le cercle du milieu étant donné, décrire les quatre autres, égaux entre eux.



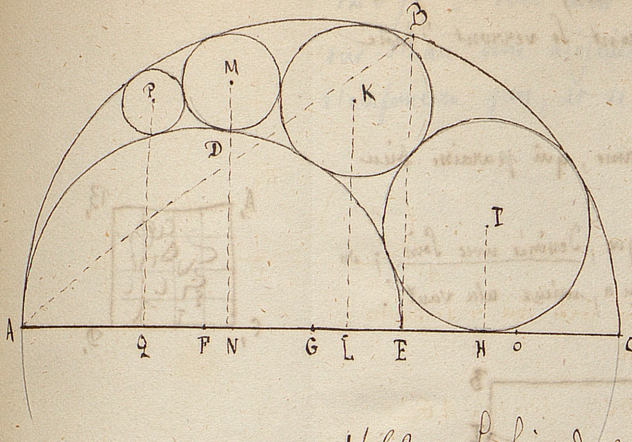
1461. Mesurer une ligne horizontale, accessible en une seule extrémité, avec deux bâtons inégaux.



La figure le montre.

1462. On donne les deux demi-cercles ABC, ADE. construire les autres.

Prenez FO = AG. alors AO = la somme des rayons des deux cercles donnés.
Menez EB, et joignez AB.
AH est 3e proportionnelle à AO et AB. — Quant au



Rayon HI, c'est une 4e. proportionnelle à AO, AH, FG.

Si l'on décrit K, M, P, (comment ?), on aura

KL = 3 f. le Rayon du cercle K

MN = 5 f. " " M

PQ = 7 " " " P

et ainsi de suite.

1463. Le Sinus de 30° est moyen proportionnel entre le Sinus de 15° et le Sinus de 75°.

Physique, et autres.

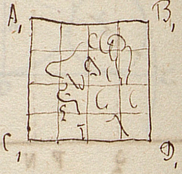
1464. Si l'on dispose à angle droit deux miroirs plans, et qu'on s'approche de l'un en suivant une ligne qui lui soit perp. il paraîtra que la même personne se meut en sens contraire.

1465. Si deux miroirs font un angle obtus un peu plus grand qu'un droit par rapport à celui qui regarde, il se verra avec un seul œil; mais s'ils font un angle angle un peu plus petit qu'un droit, il se verra avec trois yeux, deux nez, deux bouches, etc. L'angle variant, on verra d'autres figures grotesques.

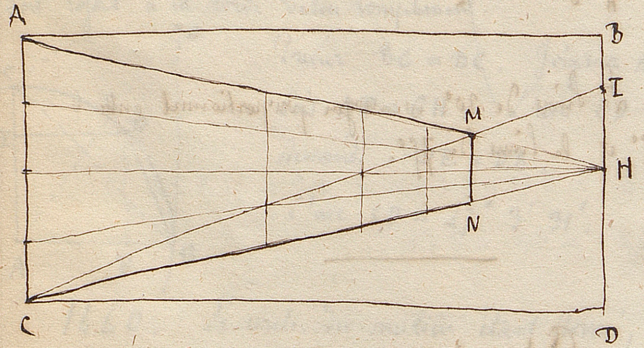
1466. Si l'on dispose dans un cabinet plusieurs miroirs,

les uns plus bas et inclinés à l'horizon, les autres plus haut, aussi inclinés, ceux qui entreront se verront d'une figure monstrueuse.

1467. Construire une figure difforme, qui paraisse bien d'un certain point.



Soit $A_1B_1C_1D_1$ une figure quelconque, dessinée avec soin; on la partage en petits carrés: plus il y en a, mieux cela vaut.



Construisez alors un rectangle quelconque ABCD. Partagez AC en autant de parties égales que A_1C_1. Joignez à H, milieu de BD.

Puis, I étant quelconque, achevez la figure. Dessinez dans le trapèze AMNC ce qui est dans $A_1B_1C_1D_1$: et le résultat paraîtra exact, vu d'un point élevé en H, perpendiculairement au papier, et à une distance égale à HI.

1468. On peut construire un cadran solaire avec un cône ou un cylindre, dont l'axe est parallèle à la ligne des pôles. La ligne de séparation d'ombre et de lumière est une génératrice, qui tourne uniformément autour du solide.
On peut prendre une bande de papier pliée en cercle et représentant l'équateur.

1469. – Pour avoir la méridienne, poser légèrement sur l'eau une aiguille un peu graissée. Elle ne s'enfoncera pas, et se dirigera du N. au S.

1270. Sur les Erreurs Relatives. —

Soit à multiplier

$$45,24.. \times 3,1415...$$

les deux facteurs étant connus à une d'unité près de leur dernier ordre. — combien de chiffres exacts aura-t-on au Produit?

L'Erreur relative du Produit sera

$$E_{rel.\ du\ P^t} < \frac{1}{4524,...} + \frac{1}{31415,...}$$

$$< \frac{31415... + 4524,...}{4524,.. \times 31415,...}$$

$$< \frac{31416 + 4525}{\text{le Prod}^t. \times 10^6}$$

d'où

$$\text{Err. absol.} < \frac{31416 + 4525}{10^6} \qquad \left\{ \begin{array}{r} .31416 \\ 4525 \\ \hline 0,035941 \end{array} \right.$$

$$< 0,04.$$

Donc on ne devra conserver que les dixièmes.

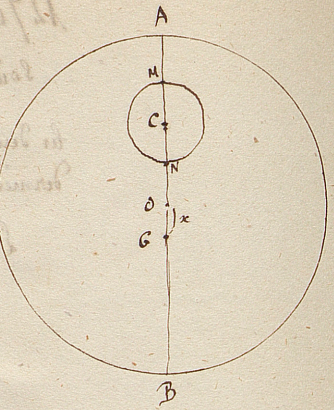
Règle : — Les deux facteurs d'un produit étant donnés chacun avec un certain nombre de chiffres exacts, — additionnez ces deux facteurs, dont le dernier chiffre est forcé, comme s'ils représentaient des unités simples ; séparez à la somme autant de décimales qu'il y en a dans les deux facteurs, et vous aurez une limite de l'erreur absolue du Produit.

Il est clair qu'il suffit à présent d'employer la multiplication abrégée.

1271. (Solution du problème 429).

On partage le Rayon d'une Sphère en 4 parties égales ; sur les deux divisions moyennes comme diamètre, on décrit une

Sphère; cette Sphère étant enlevée de la Grande, trouver le Centre de Gravité de la partie Restante.



Il est clair que ce centre est sur OB, soit en G. On pourrait le trouver par le théorème des moments appliqué à la tangente en B. — voici qui est un peu plus simple.

Le poids de la petite Sphère étant appliqué en C et celui de la partie Restante en G, ont évidemment une Résultante passant par O.

Donc (principe du Levier)

$$p . OC = (P - p)\, x .$$

ou

$$v . OC = (V - v)\, x .$$

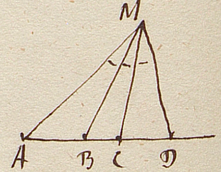
Soit $R = 1$, et supprimons $\frac{4}{3}\pi$ facteur commun :

$$\frac{1}{64} \cdot \frac{1}{2} = \left(1 - \frac{1}{64}\right) x$$

$$1/2 = 63\, x$$

$$x = \frac{1}{126} \text{ du Rayon OB.}$$

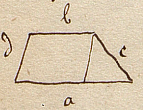
1472. (Solution du problème 125). — Trouver M de façon que les 3 angles en M soient égaux.



Je construis le lieu des points dont les distances à A et C sont dans le Rapport $\frac{AB}{BC}$: le point M sera dessus; de même ... donc ... cqfd. — C'est facile directem^t. par la G. analytique. On peut Dég

---

1473. Trouver la Surface du Trapèze en fonction des 4 côtés.



Trapèze $= (a+b)\,\frac{h}{2}$

Triangle $= (a-b)\,\frac{h}{2}$

Trap. = Triangle $\times \frac{a+b}{a-b}$

$$\text{d'où Trap} = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{p\,(p-c)(p-d)(p-a+b)}$$

$c+d+a-b = 2p$, et $\text{Trap} = \frac{a+b}{a-b}\sqrt{(P-a)(P-b)(P-b-c)(P-b-d)}$ si $2P = a+b+c+d$.

La surface du Quadrilatère inscrit est

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$ Ritt, p. 341.

1474. Calculer $S = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n$

1°. on peut poser

$$\begin{aligned} S = q + q^2 + q^3 + q^4 + &\cdots + q^n \\ + q^2 + q^3 + q^4 + &\cdots + q^n \\ + q^3 + q^4 + &\cdots + q^n \\ + q^4 + &\cdots + q^n \\ &\ \ \vdots \\ &+ q^n \end{aligned}$$

et faire toutes ces sommes.

2°. Plus simplement

$$S = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q\left(q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + (n-1)q^{n-1}\right)$$

$$S = \frac{q^{n+1} - q}{q-1} + q\left(S - nq^n\right)$$

Eq. d'où l'on tire aisément

$$S = \frac{q}{(q-1)^2}\left\{nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1\right\}$$

1475. Trouver x, y, z $(x+y+z = 90°)$, de sorte que

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c}.$$

on tire de là

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c} = \frac{\cos y + \cos z}{b+c} = \frac{2\cos\frac{y+z}{2}\cos\frac{y-z}{2}}{b+c} = \frac{\sqrt{2}\cdot\cos\frac{y-z}{2}}{b+c}$$ cos v

$$\text{"}\quad\text{"}\quad\text{"} = \frac{\cos z - \cos y}{c-b} = \frac{2\sin\frac{y+z}{2}\sin\frac{y-z}{2}}{c-b} = \sqrt{2}$$

faux. — c'est moins facile que ça.

voici la solution. — Il faut partager le quadrant en 3 parties x, y, z, telles que

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\cos z}{c}.$$

d'où

$$\frac{\sin(90^\circ - x)}{a} = \frac{\sin(90^\circ - y)}{b} = \frac{\sin(90^\circ - z)}{c}$$

donc, si A, B, C sont les angles du triangle ayant pour côtés a, b, c, comme on a

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

il en résulte

$$90^\circ - x = A \quad \text{d'où} \quad x = 90^\circ - A$$

$$\text{et} \quad y = 90^\circ - B$$

$$z = 90^\circ - C$$

ce qui donne bien d'ailleurs $x + y + z = 90^\circ$.

On peut du reste obtenir directement ce résultat. — En effet, on a $\cos z = \cos\{90^\circ - (x+y)\} = \sin(x+y)$: d'où

$$\frac{\cos x}{a} = \frac{\cos y}{b} = \frac{\sin(x+y)}{c}$$

d'où

$$\begin{cases} c\cos x = a\sin(x+y) & (1) \\ c\cos y = b\sin(x+y) & (2) \\ b\cos x = a\cos y & (3) \end{cases}$$

L'Eq. (1) donne

$$c\cos x = a\sin x\cos y + a\sin y\cos x$$

et, ayant égard à l'Eq. (3)

$$c\cos x = b\sin x\cos x + \cos x\sqrt{a^2 - b^2\cos^2 x}$$

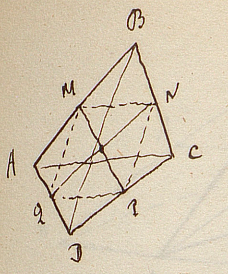
$$c - b\sin x = \sqrt{a^2 - b^2\cos^2 x}$$

d'où

$$\sin x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \cos A$$

$$x = 90 - A.$$

cqfd. Vble.



1476. Dans tout quadrilatère, plan ou gauche, la somme des carrés des diagonales est double de la somme des carrés des médianes.

Soit ABCD un quadrilatère gauche. on a

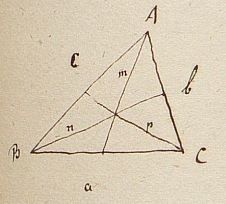
$$\overline{MN}^2 = 1/4 . \overline{AC}^2$$
$$\overline{PQ}^2 = 1/4 . \overline{AC}^2$$

d'où
$$\overline{MN}^2 + \overline{PQ}^2 = 1/2 . \overline{AC}^2$$

de même
$$\overline{MQ}^2 + \overline{NP}^2 = 1/2 . \overline{BD}^2$$

Mais MNPQ est un parallélogramme, et la somme des carrés de ses côtés est égale à la somme des carrés de ses diagonales. Donc

$$\overline{MP}^2 + \overline{NQ}^2 = 1/2 \left(\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2\right)$$ c.q.f.d.



1477. Trouver la surface du triangle en fonction des trois médianes.

on a
$$a^2 + b^2 = 2p^2 + \frac{c^2}{2}$$

ou (1) $2a^2 + 2b^2 - c^2 = 4p^2$

et (2) $2a^2 + 2c^2 - b^2 = 4n^2$

(3) $2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4m^2$

ajoutant (1) et (2)
$$4a^2 + b^2 + c^2 = 4p^2 + 4n^2$$
ou
$$8a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 8p^2 + 8n^2$$

Remplaçant $2b^2 + 2c^2$ par sa valeur tirée de (3)

$$9a^2 = 8p^2 + 8n^2 - 4m^2$$
de même
$$9b^2 = 8p^2 + 8m^2 - 4n^2$$
$$9c^2 = 8m^2 + 8n^2 - 4p^2 \qquad (A)$$

or la surface d'un triangle est

$$S^2 = \frac{b^2c^2}{4}\sin^2 A = \frac{b^2c^2}{4}(1 - \cos^2 A) = \frac{b^2c^2}{4}\left\{1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}\right\}$$
$$S^2 = \frac{1}{16}\left\{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2\right\}$$

On tire donc des équations (A) $b^2+c^2-a^2$ et b^2c^2. — D'abord :

$$9(b^2+c^2-a^2) = 20m^2 - 4n^2 - 4p^2$$

et ensuite :

$$81\, b^2c^2 = 16\,(2p^2+2m^2-n^2)\,(2m^2+2n^2-p^2)$$

$$81\, b^2c^2 = 16\,(4m^4-2n^4-2p^4+2m^2n^2+2m^2p^2+5n^2p^2)$$

avec cela

$$81\,(b^2+c^2-a^2)^2 = 16\,(5m^2-n^2-p^2)^2$$

$$= 16\,(25m^4+n^4+p^4-10m^2n^2-10m^2p^2+2n^2p^2)$$

d'où

$$81\,\{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\} = 16\,(-9m^4-9n^4-9p^4+18m^2n^2+18m^2p^2+18n^2p^2)$$

d'où

$$\frac{1}{16}\{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2\} = \frac{1}{9}(-m^4-n^4-p^4+2m^2n^2+2m^2p^2+2p^2n^2)$$

$$= \frac{16}{9}\,M\,(M-m)\,(M-n)\,(M-p)$$

en posant $m+n+p = 2M$.

Donc

$$S^2 = \frac{16}{9}\,M\,(M-m)\,(M-n)\,(M-p)$$

$$S = \frac{4}{3}\sqrt{M\,(M-m)\,(M-n)\,(M-p)}$$

C.q.f.t.

Remarque. — La première des équations (A), si l'on pose

$a' = \frac{3}{4}a$ d'où $a'^2 = \frac{9}{16}a^2$ et $9a^2 = 16a'^2$

devient

$$16a'^2 = 8p^2+8n^2-4m^2$$

ou

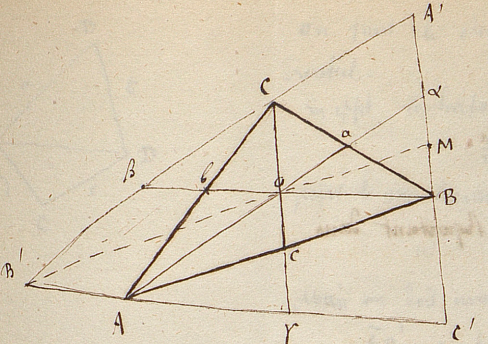
$$p^2+n^2 = 2a'^2 + \frac{m^2}{2}$$

Donc $a' = \frac{3}{4}a$ est la médiane d'un triangle ayant m, n, p pour côtés : d'où

Th. Si l'on construit un triangle ayant pour côtés les médianes d'un autre, les médianes du premier seront les 3/4 des côtés du second.

On peut d'ailleurs le prouver géométriquement.

En effet soit un triangle ABC. Menons par les sommets des parallèles aux médianes, nous formerons un triangle A'B'C'. — Il est clair d'abord que le point O est le milieu de $A\alpha$, $B\beta$ et $C\gamma$: car par exemple $O\alpha$ est parallèle à BC et α est le milieu de BC, donc O est celui de $B\beta$. — Donc $Oa = a\alpha$, $Ob = b\beta$, $Oc = c\gamma$. — Donc aussi



$B'\beta = AO$, $\beta C = 2.Oa = AO$, $CA' = 2a\alpha = AO$,

et $A'B'$ est divisé en β et C en 3 parties égales ; de même les autres.

Il résulte de là que la ligne $B'O$ passera par le milieu M de αB et aussi de $A'C'$ et sera médiane du triangle $A'B'C'$. De plus, on aura

$$B'M = \frac{3}{2} AB.$$

D'autre part, $AB' = \frac{3}{2} . A\alpha = \frac{3}{2}\left(\frac{4}{3} Aa\right) = 2Aa$.

Donc les côtés de $A'B'C'$ sont doubles des médianes de ABC, et ses médianes sont les $3/2$ des côtés de ABC. — Donc, si un triangle a pour côtés les médianes mêmes de ABC, ses médianes seront les $3/4$ des côtés de ABC. c.q.f.d.

1478. Trouver la surface d'un triangle en fonction des trois hauteurs.

Soient h, h' h'' ces hauteurs. S la surface

$$a = \frac{2S}{h} \qquad b = \frac{2S}{h'} \qquad c = \frac{2S}{h''}$$

D'où

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{h} + \frac{1}{h'} + \frac{1}{h''} = \frac{a+b+c}{2S} = \frac{p}{S}$$

De même

$$\frac{1}{H} - \frac{2}{h} = \frac{p-a}{S}$$

$$\frac{1}{H} - \frac{2}{h'} = \frac{p-b}{S}$$

$$\frac{1}{H} - \frac{2}{h''} = \frac{p-c}{S}$$

Substituant dans $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ on aura

$$S = S^2 \sqrt{\frac{1}{H}\left(\frac{1}{H}-\frac{2}{h}\right)\left(\frac{1}{H}-\frac{2}{h'}\right)\left(\frac{1}{H}-\frac{2}{h''}\right)}$$

D'où

$$\frac{1}{S} = \sqrt{\frac{1}{H}\left(\frac{1}{H}-\frac{2}{h}\right)\left(\frac{1}{H}-\frac{2}{h'}\right)\left(\frac{1}{H}-\frac{2}{h''}\right)}$$

c.q.f.d.

1479. Résoudre

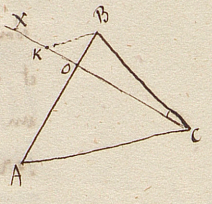
$$\frac{\sin x + \cos x}{a} = \frac{1 + \sin x \cos x}{b}$$

Élevons au carré :

$$\frac{1 + 2\sin x \cos x}{a^2} = \frac{(1 + \sin x \cos x)^2}{b^2}$$

d'où l'on peut tirer le produit $\sin x \cos x$, et, le reportant dans la 1ère équation, on aura $\sin x + \cos x$. .

1480. Construire un triangle ABC, connaissant la différence des angles à la base AC, et les deux autres côtés.



Soit BCX cette différence. on a OC = OA.
Soit OK = OB, alors CK = BA. on peut donc construire le triangle CBK, dans lequel BK est parallèle à la base CA, donc...

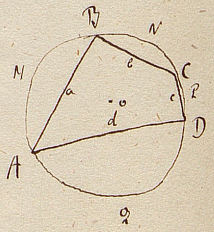
c q f d.

La solution trigonométrique est aisée : car

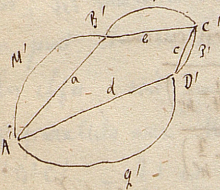
$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C-A) = \frac{c-a}{c+a} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C+A)$$

d'où C+A.

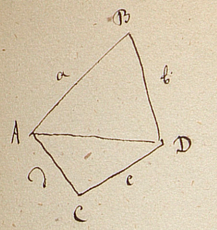
1481. De tous les quadrilatères qu'on peut former avec des côtés donnés, celui qui a la plus grande surface est inscriptible.



Remarquons en effet que avec les quatre côtés a, b, c, d, on peut former un quadrilatère inscriptible. — Je le construis. — J'en construis maintenant un autre quelconque ayant les mêmes côtés



et je fais sur ces côtés des segments égaux respectivement à AMB, BNC, etc. La fig. totale ainsi construite a une aire moindre que le cercle O, puisqu'elle a même périmètre et que, de toutes les surfaces ayant même contour, le cercle est la plus grande (Blanchet). Donc aussi A'B'C'D' < ABCD. c q f d.



on peut le démontrer directement par le calcul différentiel.

En effet la surface est

$$\frac{1}{2} ab \sin B + \frac{1}{2} cd \sin C$$

pour le maximum, il faut que sa dérivée soit nulle :

$$(1) \qquad ab \cos B \frac{dB}{dC} + cd \cos C = 0$$

Mais on doit avoir

$$\overline{AD}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos B = c^2 + d^2 - 2cd \cos C$$

et en différentiant

$$(2) \qquad ab \sin B \frac{dB}{dC} = cd \sin C$$

Entre (1) et (2) éliminons $\frac{dB}{dC}$. – on aura

de (1) $$\frac{dB}{dC} = - \frac{cd \cos C}{ab \cos B}$$

de (2) $$\frac{dB}{dC} = \frac{cd \sin C}{ab \sin B}$$

d'où

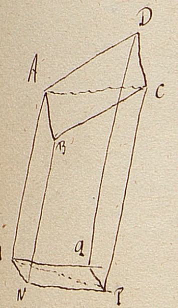
$$\frac{\sin C}{\sin B} = - \frac{\cos C}{\cos B}$$

$$\operatorname{tg} C = - \operatorname{tg} B$$

$$C + B = 180^\circ$$ c.q.f.d.

1482. Trouver le volume d'un tronc de parallélipipède.

Soit b la base MNPQ, et $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les hauteurs des points A, B, C, D au-dessus du plan MNPQ.



Le plan ACPM décompose le solide en deux troncs de prismes triangulaires, et l'on a

$$V = \frac{b}{2} \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\gamma}{3} \right)$$

$$V = \frac{b}{6} \left(2\alpha + 2\gamma + \beta + \delta \right)$$

L'autre plan diagonal donnerait de même

$$V = \frac{b}{6} \left(\alpha + \gamma + 2\beta + 2\delta \right)$$

d'où

$$2V = \frac{b}{6} \left(3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 3\delta \right)$$

d'où

$$V = \frac{b}{4}\left(\alpha+\beta+\gamma+\delta\right)$$

ou

$$V = b.\ \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{4}$$

donc

Le Volume est égal au produit de l'une des bases par sa distance au centre de gravité de l'autre.

on peut écrire encore

$$V = \frac{3}{4}\, b \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{3} + \frac{\delta}{3}\right)$$

donc

Le Volume est égal aux 3/4 de la somme de 4 pyramides ayant pour base commune l'une des bases du tronc, et leurs sommets respectifs aux quatre sommets de l'autre base.

1483. Sommation de différentes Séries Trigonométriques.

1°. Cherchons

$$\left.\begin{aligned} A &= \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots + \sin nx \\ B &= \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

on y arrive aisément par la formule

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$$
$$e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1}\,\sin x$$

En effet, il en résulte qu'on aura

$$B + A\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}} + e^{2x\sqrt{-1}} + \ldots + e^{nx\sqrt{-1}} = \frac{e^{(n+1)x\sqrt{-1}} - e^{x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} - 1} = e^{x\sqrt{-1}} . \frac{e^{nx\sqrt{-1}} - 1}{e^{x\sqrt{-1}} - 1}$$

$$B + A\sqrt{-1} = e^{\left(x + \frac{n}{2}x - \frac{x}{2}\right)\sqrt{-1}} . \frac{e^{\frac{n}{2}x\sqrt{-1}} - e^{-\frac{n}{2}x\sqrt{-1}}}{e^{\frac{x}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{x}{2}\sqrt{-1}}} = e^{\frac{n+1}{2}x\sqrt{-1}} . \frac{e^{\frac{n}{2}x\sqrt{-1}} - e^{-\frac{n}{2}x\sqrt{-1}}}{e^{\frac{x}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{x}{2}\sqrt{-1}}}$$

Substituant et simplifiant

$$B + A\sqrt{-1} = \left\{\cos\frac{n+1}{2}x + \sqrt{-1}\,\sin\frac{n+1}{2}x\right\} \frac{\sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$$

d'où

$$A = \frac{\sin\frac{nx}{2}\,\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \qquad B = \frac{\sin\frac{nx}{2}\,\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

On peut arriver à ces valeurs par la Trigonométrie simple.

En effet, on a

$$A = \sin x + \sin(x+x) + \sin(x+2x) + \dots + \sin(x+(n-1)x)$$

$$A = \left\{\begin{array}{l}\sin x + \sin x \cos x + \sin x \cos 2x + \dots + \sin x \cos(n-1)x \\ \quad + \cos x \sin x + \cos x \sin 2x + \dots + \cos x \sin(n-1)x\end{array}\right\}$$

$$A = \left\{\begin{array}{l}\sin x \{1 + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos(n-1)x\} \\ + \cos x \{\sin x + \sin 2x + \dots + \sin(n-1)x\}\end{array}\right\}$$

$$A = \sin x(1 + B - \cos nx) + \cos x(A - \sin nx)$$

on trouve absolument de même

$$B = \cos x(1 + B - \cos nx) - \sin x(A - \sin nx)$$

Ces deux Equations peuvent s'écrire

$$A(1-\cos x) - B\sin x = \sin x - \sin(n+1)x$$

$$B(1-\cos x) + A\sin x = \cos x - \cos(n+1)x$$

d'où

$$A = \frac{\{\cos x - \cos(n+1)x\}\sin x + \{\sin x - \sin(n+1)x\}(1-\cos x)}{(1-\cos x)^2 + \sin^2 x}$$

$$A = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\{\cos x - \cos(n+1)x\} + 2\sin^2\frac{x}{2}\{\sin x - \sin(n+1)x\}}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$A = \frac{\cos x\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\cos(n+1)x + \sin x\sin\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\sin(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

Soit
$$A = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(nx + \frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}$$

et transformant en produit

$$A = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

et l'on a de même

$$B = \frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

2°. Soit maintenant

$$\left.\begin{aligned} M &= \sin(a+x) + \sin(a+2x) + \cdots + \sin(a+nx) \\ N &= \cos(a+x) + \cos(a+2x) + \cdots + \cos(a+nx) \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

on aura

$$M = \left\{\begin{aligned} &\sin a \cos x + \sin a \cos 2x + \cdots + \sin a \cos nx \\ &+ \cos a \sin x + \cos a \sin 2x + \cdots + \cos a \sin nx \end{aligned}\right\}$$

$$M = B \sin a + A \cos a = \frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \left\{ \sin a \cos\frac{(n+1)x}{2} + \cos a \sin\frac{(n+1)x}{2} \right\}$$

$$M = \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\left(a + \frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

et de même

$$N = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cos\left(a + \frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

Remarque : Si l'on voulait

$$M' = \sin a_1 + \sin(a_1+x) + \sin(a_1+2x) + \cdots + \sin(a_1 + \overline{n-1}\,x)$$

Il suffirait de poser dans la valeur de M

$$a_1 = a + x \quad \text{d'où} \quad a = a_1 - x$$

et

$$a + 2x = a_1 + x$$
$$a + 3x = a_1 + 2x$$
$$\vdots$$
$$a + nx = a_1 + \overline{n-1}\,x$$

donc

$$M' = \frac{\sin\frac{nx}{2} \sin\left(a_1 + \frac{(n-1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

et de même

$$N' = \frac{\sin\frac{nx}{2} \cos\left(a_1 + \frac{(n-1)x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}$$

3°. Soit à trouver

$$\left.\begin{aligned} C &= \sin a \sin b + \sin 2a \sin 2b + \cdots + \sin na \sin nb \\ D &= \cos a \cos b + \cos 2a \cos 2b + \cdots + \cos na \cos nb \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

ajoutant et retranchant :

$$D + C = \cos(a-b) + \cos 2(a-b) + \cdots + \cos n(a-b)$$

$$D - C = \cos(a+b) + \cos 2(a+b) + \cdots + \cos n(a+b)$$

ayant égard aux formules (1), on trouvera

$$D + C = \frac{\sin \frac{n(a-b)}{2} \cos \frac{(n+1)(a-b)}{2}}{\sin \frac{a-b}{2}}$$

$$D - C = \frac{\sin \frac{n(a+b)}{2} \cos \frac{(n+1)(a+b)}{2}}{\sin \frac{a+b}{2}}$$

D'où l'on tire C et D. — Mais leurs valeurs ne sont pas calculables par logarithmes, et paraissent fort difficiles à transformer en produits.

— On aurait d'une manière semblable

$$\sin a \cos b + \sin 2a \cos 2b + \ldots + \sin na \cos nb$$

et

$$\sin(\alpha+a)\cos(\beta+b) + \sin(\alpha+2a)\cos(\beta+2b) + \ldots + \sin(\alpha+na)\cos(\beta+nb)$$

2°. Soit

$$\left.\begin{array}{l} P = \cos^2 a + \cos^2(a+b) + \cos^2(a+2b) + \ldots + \cos^2(a+\overline{n-1}\,b) \\ Q = \sin^2 a + \sin^2(a+b) + \sin^2(a+2b) + \ldots + \sin^2(a+\overline{n-1}\,b) \end{array}\right\} (1)$$

ajoutant :

$$P + Q = n$$

Retranchant :

$$P - Q = \cos 2a + \cos 2(a+b) + \cos 2(a+2b) + \ldots + \cos 2(a+\overline{n-1}\,b)$$

$$= \cos 2a + \cos(2a+2b) + \cos(2a+2.2b) + \cos(2a+3.2b) + \ldots + \cos(2a+\overline{n-1}.2b)$$

$$P - Q = \frac{\sin nb \cos(2a+\overline{n-1}.b)}{\sin a}$$

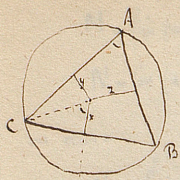
D'où P et Q.

1484. — Théorème. — Dans tout triangle, la somme des perpendiculaires abaissées du centre du cercle circonscrit sur les 3 côtés est égale au rayon du cercle circonscrit plus celui du cercle inscrit.

En effet, soient

$$x \quad y \quad z$$

ces 3 perpendiculaires. — On a évidemment :



$$x = R\cos A$$
$$y = R\cos B$$
$$z = R\cos C$$

d'où

$$x+y+z = R\left(\cos A + \cos B + \cos C\right)$$

et, d'après la formule du n°. suivant,

$$x+y+z = R\left(4\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1\right)$$

$$= R + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$x+y+z = R + 4R\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

$$= R + 4R\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = R + 4R\frac{S^2}{pabc} = R + \frac{S}{p}$$

$$x+y+z = R + r \qquad \text{c.q.f.d.}$$

Ce mode de démonstration prouve aussi que si une des perpendiculaires tombe sur un côté opposé à un angle obtus, on doit la prendre négativement.

La démonstration géométrique paraît difficile. (Voir 1509)

1485. Démontrer que l'on a

$$\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1$$

si $A+B+C = 180°$.

1°. Démonstration directe.

$$\cos A+\cos B+\cos C = -\cos(B+C) + \cos B+\cos C = -\cos B\cos C + \sin B\sin C + \cos B + \cos C$$

$$= -\left(\cos^2\frac{B}{2}-\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right) + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos^2\frac{B}{2} - \sin^2\frac{B}{2} + \cos^2\frac{C}{2} - \sin^2\frac{C}{2}$$

$$= -\left(1-2\sin^2\frac{B}{2}\right)\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right) + 4\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} + 2 - 2\sin^2\frac{B}{2} - 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= 4\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right) + 1$$

$$= 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 1 \qquad \text{c.q.f.d.}$$

2° Démonstration tirée d'une formule plus générale.

On a facilement

$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c$

d'où, par des changements de signes

$\cos(a+b-c) = \cos a \cos b \cos c + \cos a \sin b \sin c - \sin a \sin b \cos c + \sin a \cos b \sin c$

$\cos(a-b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c + \sin a \sin b \cos c - \sin a \cos b \sin c$

$\cos(-a+b+c) = \cos a \cos b \cos c + \cos a \sin b \sin c + \sin a \sin b \cos c + \sin a \cos b \sin c$

ajoutant ces quatre équations, on a on a

$$\cos(a+b+c) + \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(-a+b+c) = 4 \cos a \cos b \cos c$$

posons

$$a+b-c = z$$
$$a-b+c = y$$
$$-a+b+c = x$$

d'où

$$a+b+c = x+y+z$$

d'où encore

$$a = \frac{y+z}{2}$$
$$b = \frac{x+z}{2}$$
$$c = \frac{x+y}{2}$$

et substituons, il viendra

$$\cos x + \cos y + \cos z + \cos(x+y+z) = 4 \cos \frac{y+z}{2} \cos \frac{x+z}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

formule générale.

Si maintenant $x = A$ $y = B$ $z = C$, on aura $x+y+z = 180°$ et $\frac{y+z}{2} = 90° - \frac{A}{2}$, $\frac{x+z}{2} = 90° - \frac{B}{2}$, $\frac{x+y}{2} = 90° - \frac{C}{2}$, d'où la formule qu'il fallait démontrer.

1486. Examiner si l'on a

$$\sin(a \pm b) \gtrless \sin a \pm \sin b$$

Cherchons seulement si

$$\sin(a+b) \gtrless \sin a + \sin b$$

développons

$$\sin a \cos b + \sin b \cos a \gtrless \sin a + \sin b$$

$$\sin a (1 - \cos b) + \sin b (1 - \cos a) \lessgtr 0$$

$$\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \sin^2 \frac{b}{2} + \sin \frac{b}{2} \cos \frac{b}{2} \sin^2 \frac{a}{2} \lessgtr 0$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\left\{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\right\}\lesseqgtr 0$$

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a+b}{2}\lesseqgtr 0$$

Or, si a et b sont $< 180°$ on c'est le signe $>$ qui a lieu. Donc alors

$$\sin(a+b) < \sin a + \sin b$$

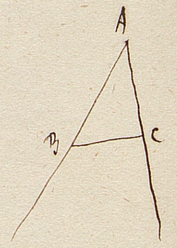
Si $b<0$, on trouve pour condition

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{a-b}{2}\gtreqless 0$$

Si donc $a>b$ et $a<360°$,

$$\sin(a-b) > \sin a - \sin b.$$

1487. Un angle A étant donné, mener une droite minima qui détermine un triangle d'une surface donnée.



Soit $BC=a$ la ligne cherchée, et m^2 la surface du triangle ABC. — Nous chercherons ses côtés b et c sous la condition que a soit minimum.

$$2m^2 = bc\sin A$$

$$a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= (b+c)^2 - \frac{8m^2}{\sin A}\cos^2\frac{A}{2}$$

$$= (b+c)^2 - 4m^2\cot\frac{A}{2}$$

d'où

$$b+c = \sqrt{a^2+4m^2\cot\frac{A}{4}}$$

on aura de même

$$b-c = \sqrt{a^2-4m^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

d'où b et c.

Pour que b et c soient réels, il faut que

$$a^2 > 4m^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

Donc le minimum de a^2 est

$$a^2 = 4m^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

d'où il resulte $b-c=0$, $b=c$ et (à cause de la valeur de $(b+c)$)

$$b=c=\frac{1}{2}\sqrt{4m^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}+4m^2\cot\frac{A}{2}} = m\sqrt{\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\cot\frac{A}{2}}$$

$$b = c = m\sqrt{\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{A}{2}}} = m\sqrt{\frac{1}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}} = m\sqrt{\frac{2}{\sin A}}$$

$$b^2 = c^2 = \frac{2m^2}{\sin A}$$

or il est facile de construire géométriquement cette valeur, et d'achever le triangle cherché, qui doit être isocèle.

1288. Résoudre

$$\cos x + a\cos x \sin x + \sin x = 1$$

De là :

$$\sin x + \cos x = 1 - a\sin x\cos x$$

$$1 + 2\sin x\cos x = 1 + a^2\sin^2 x\cos^2 x - 2a\sin x\cos x$$

$$2 = a^2\sin x\cos x - 2a$$

$$4 = a^2\sin 2x - 4a$$

$$\sin 2x = \frac{4(a+1)}{a^2}$$

1289. Résoudre

$$\operatorname{tg} x + \cot x + \sec x + \operatorname{cosec} x = 1$$

on en tire

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x} = 1$$

$$\frac{\sin^2 x + \cos^2 x + \sin x + \cos x}{\sin x\cos x} = 1$$

$$\frac{2 + 2(\sin x + \cos x)}{\sin 2x} = 1$$

$$2(\sin x + \cos x) = \sin 2x - 2$$

$$4(1 + \sin 2x) = \sin^2 2x + 1 - 2\sin 2x$$

$$\sin^2 2x - 6\sin 2x - 3 = 0$$

$$\sin 2x = 3 \pm \sqrt{12} = 3 \pm 2\sqrt{3} = 3 - 2\sqrt{3} \quad (\text{car } \sin < 1)$$

$-x = 13^\circ\, 49'\, 8'',61$

1290. Résoudre

$$\cot^2 x - \sec^2 x = \frac{1}{4}$$

on en tire

$$\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\cos^4 x - \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{4}$$

$$5\cos^4 x + 3\cos^2 x - 4 = 0$$

$$\cos^2 x = \frac{-3+\sqrt{89}}{10} \qquad x = 36^\circ\ 39'\ 56'',53$$

1291. Résoudre

$$\sec\frac{x}{2} + \cos x = 2$$

on en tire :

$$\frac{1}{\cos\frac{x}{2}} + \cos x = 2$$

$$1 + \cos x \cos\frac{x}{2} = 2\cos\frac{x}{2}$$

$$1 - \cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{2}\left(1 - \cos x\right)$$

$$\sin^2\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{2}$$

$$= 4\cos\frac{x}{2}\sin^2\frac{x}{4}\cos^2\frac{x}{4}$$

$$(1) \qquad 1 = 4\cos\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{4}$$

$$1 = 4\left(2\cos^2\frac{x}{4} - 1\right)\cos^2\frac{x}{4}$$

$$1 = 8\cos^4\frac{x}{4} - 4\cos^2\frac{x}{4}$$

$$\cos^2\frac{x}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{8} = \frac{2+2\sqrt{3}}{8} = \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

$$\cos\frac{x}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{3}}$$

Il y a en plus la solution $x = 0$, supprimée dans l'Équation (1) quand on a divisé par $\sin^2\frac{x}{2}$.

1492. – Eliminer a entre

$$\left.\begin{aligned} m &= \operatorname{cosec} a - \sin a \\ n &= \sec a - \cos a \end{aligned}\right\}$$

on en tire

$$m = \frac{1}{\sin a} - \sin a$$

$$n = \frac{1}{\cos a} - \cos a$$

ou

$$m \sin a = 1 - \sin^2 a$$

$$n \cos a = 1 - \cos^2 a$$

on peut arriver bien plus simplement. voir 1512.

ou encore

$$\sin^2 a + m \sin a - 1 = 0$$

$$\cos^2 a + n \cos a - 1 = 0$$

d'où

$$\sin a = \frac{-m \pm \sqrt{m^2+4}}{2}$$

$$\cos a = \frac{-n \pm \sqrt{n^2+4}}{2}$$

et, comme $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$, on aura successivement

$$4 = m^2 + m^2 + 4 \mp 2m\sqrt{m^2+4} + n^2 + n^2 + 4 \mp 2n\sqrt{n^2+4}$$

$$4 = 2m^2 + 2n^2 + 8 \mp 2m\sqrt{m^2+4} \mp 2n\sqrt{n^2+4}$$

$$m^2 + n^2 + 2 = \pm m\sqrt{m^2+4} \pm n\sqrt{n^2+4}$$

Elevant au carré

$$m^4 + n^4 + 4m^2 + 4n^2 + 2m^2n^2 + 4 = m^4 + 4m^2 + n^4 + 4n^2 \pm 2mn\sqrt{m^2+4}\sqrt{n^2+4}$$

$$m^2n^2 + 2 = \pm mn\sqrt{m^2+4}\sqrt{n^2+4}$$

Elevant encore au carré

$$m^4n^4 + 4m^2n^2 + 4 = m^4n^4 + 4m^2n^2(m^2+n^2) + 16m^2n^2$$

$$1 = m^2n^2(m^2+n^2) + 3m^2n^2$$

$$m^2n^2(m^2+n^2+3) = 1$$

1493. Eliminer x et y entre les 3 Eq.

$$a \sin^2 x + b \cos^2 x = m$$

$$b \sin^2 y + a \cos^2 y = n$$

$$a \operatorname{tg} x = b \operatorname{tg} y$$

Transformant les Sin et Cos. en Tang. on trouve aisément, par les deux premières

$$Tg^2 x = \frac{m-b}{a-m}$$

$$Tg^2 y = \frac{n-a}{b-n}$$

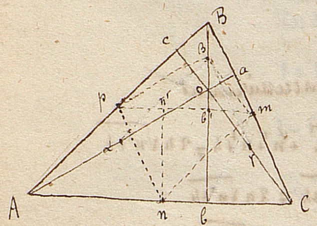
et, ayant égard à la 3e.

$$\frac{m-b}{a-m} : \frac{n-a}{b-n} = \frac{b^2}{a^2}$$

ce qui, en réduisant, et supprimant le facteur commun $(a+b)$, donne

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

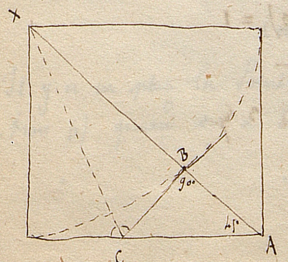
1294. Théorème. — Les milieux des côtés d'un triangle, les pieds de ses hauteurs, et les milieux des segments des hauteurs compris entre leur point de concours et les sommets, sont neuf points situés sur une même circonférence.



En effet, 1°. Soit nn' perp. sur pm. Il est clair que les deux triangles pnn' et Bb'm sont égaux : car pn = Bm et les angles adjacents sont égaux. — Donc pn' = mb'. Donc n et b sont à la même distance du milieu de n'b', et aussi du centre du cercle pmn. Donc ce cercle passe en b, et de même en a et c.

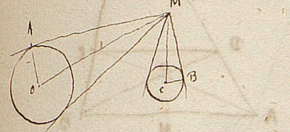
2°. L'angle pβm est égal, à cause du parallélisme des côtés, à AOC, lequel est supplémt. de pnm (côtés perp.) Donc la circ. pnm passe en β, et de même en α et γ. (Vill.)

1295. Construire un carré, connaissant la différence entre la diagonale et le côté.



La figure montre la solution.

1296. Trouver le Lieu des points d'où deux cercles donnés sont vus sous le même angle.

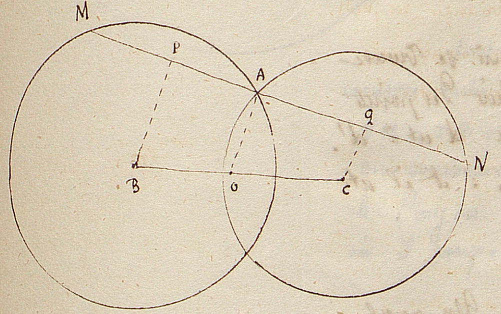


M un point du Lieu. — MOA, MCB sont semblables; $\frac{MO}{MC} = \frac{R}{r}$. Donc le lieu est la circonférence dont le diamètre est la distance des deux centres de similitude.

1297. Mener par le point A la droite MN de sorte qu'on ait $\frac{AM}{AN} = \frac{m}{n}$.

on aura aussi

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{m}{n}$$

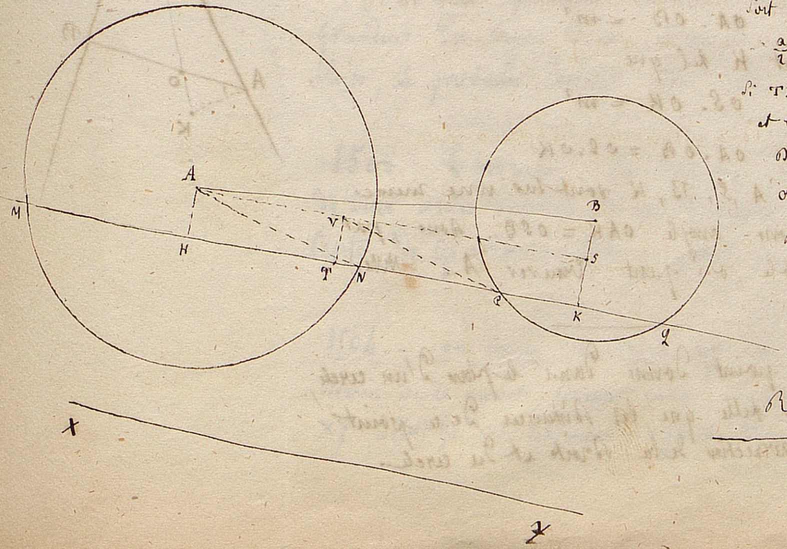


Soit AO parallèle à BP

$$\frac{OB}{OC} = \frac{m}{n}$$

on peut donc trouver le point O, joindre OA, et mener par A une perpendiculaire à MN.

1298. Étant données deux circonférences, mener une sécante parallèle à une ligne donnée, telle que la somme des cordes soit égale à une ligne donnée.

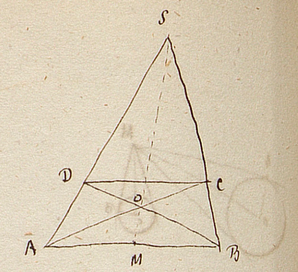


Soit $a = MN + PQ$

$\frac{a}{2} = HN + PK$

Si $TP = HN$, on aura $\frac{a}{2} = KT = SV$ et l'on peut construire SV. De plus, VP est alors égal à AN. Donc, ayant déjà V, on aura aisém^t. le point P et le problème sera résolu. (Mlle.)

1499. Construire un trapèze, connaissant les angles et les diagonales.



Soient d et d' les diagonales. — Les angles étant connus, je puis construire la figure ci-contre, et le trapèze ABCD serait semblable au trapèze demandé si l'on avait $\frac{AC}{BD} = \frac{d}{d'}$. Tout revient donc à mener DC de façon que cela ait lieu. — Or on a

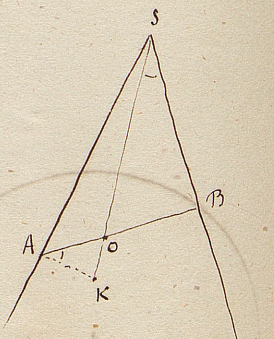
$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD} = \frac{OA+OC}{OB+OD} = \frac{AC}{BD}$$

et, si DC est bien mené,

$$\frac{OA}{OB} = \frac{d}{d'}.$$

Donc on peut déterminer le point O, qui se trouve sur la médiane SM et sur la circ. lieu des points dont les distances à A et B sont comme d est à d'. On aura ainsi un trapèze semblable : et il est aisé ensuite d'achever. (Mlle.)

1500. Par un point donné dans un angle, mener une droite telle que le produit des segments compris entre le point et chacune des droites soit égal à un carré donné.



Soit O le point, on doit avoir

$$OA \cdot OB = m^2.$$

Soit pris le point K tel que

$$OS \cdot OK = m^2$$

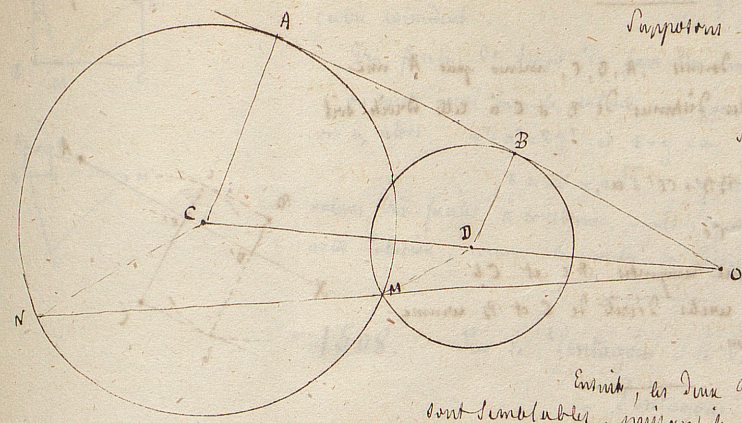
alors

$$OA \cdot OB = OS \cdot OK$$

et les 4 points A, S, B, K sont sur une même circonférence. Donc angle OAK = OSB. Donc, par un segm^t. capable, on peut trouver A. (Mlle.)

1501. Par un point donné dans le plan d'un cercle mener une droite telle que les distances de ce point aux points d'intersection de la droite et du cercle

~~Soient~~ dans le Rapport $\frac{m}{n}$.



Soit C le cercle, et O le point.

Supposons le problème résolu, et

$$\frac{OM}{ON} = \frac{m}{n}.$$

Soit pris le point D tel que

$$\frac{OD}{OC} = \frac{m}{n}$$

abaissons DB perp. sur la Tangente OA :

alors $\frac{DB}{CA} = \frac{m}{n}$.

Ensuite, les deux triangles ODM, OCN sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun compris entre côtés proportionnels. — Donc $\frac{DM}{CN} = \frac{m}{n}$. Donc DM = DB.

On construira donc le cercle dont le centre est D et le Rayon DB, et l'on joindra au point O le point où il coupe le cercle donné C. (Nll.)

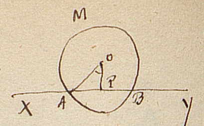
1502. Par un point donné et par le centre d'un cercle faire passer une circonférence telle que la corde commune soit égale à une ligne donnée. (Blanchet).

Il est clair que cette dernière condition détermine la grandeur du rayon de la circonférence cherchée. — Par suite, le problème devient aisé. (Nll.)

1503. Théorème. — Les droites qui joignent les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre, passent par son centre de gravité (Nll. — facile.)

1504. — On donne la droite XY et le point O. Décrire de ce point comme centre un cercle, dont la droite XY détache un segment capable d'un angle donné.

Joli et facile. — Évidemment, l'angle POA = celui dont est capable le segment AMB.

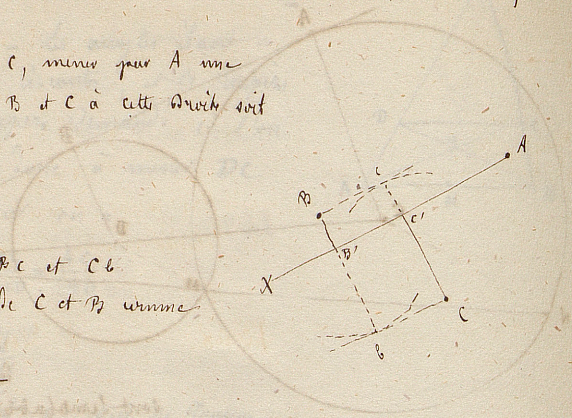


1505. — Trois points étant donnés, A, B, C, mener par A une droite telle que la somme des distances de B et C à cette droite soit donnée.

Soit AX cette droite. $BB' + CC' = a$.

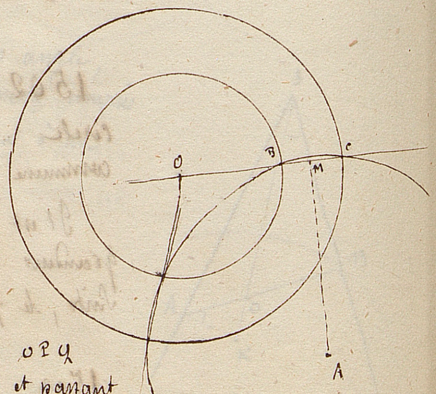
On a $a = Bb = Cc$.

Donc AX est parallèle aux tangentes Bc et Cb menées de B et C aux cercles décrits de C et B comme centres avec a pour rayon.

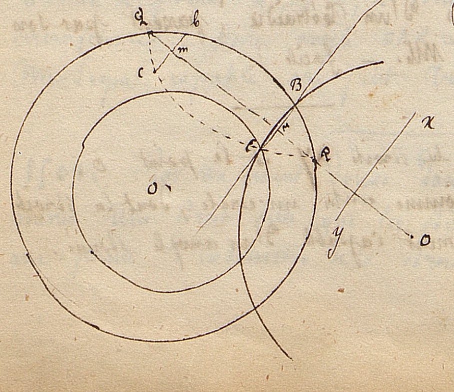


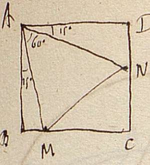
1506. Décrire du point A comme centre, un cercle qui coupe deux cercles concentriques O, de manière que la droite BC qui joint les deux points d'intersection du même côté de la ligne des centres 1°. passe par le point O, 2°. soit parallèle à une droite donnée xy.

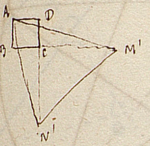
1°. — Soit M le milieu de BC. — Ce point se trouve et sur la circonférence dont OA est le diamètre, et sur celle dont le centre est O et le rayon moyen arithmétique entre ceux des deux circonférences données. (Vuib.) — 2 solutions, n'en faisant qu'une.



2°. BC est parallèle à xy. — On peut construire OPQ perp. sur xy, et passant par le milieu M de BC. Or le lieu des points c tels que bm = mc est un arc symétrique de QBP : et le point C où il coupe la petite circonf. appartient à celle qu'on cherche. (Vuib.) — 2 solutions.







1507. Inscrire un triangle équilatéral dans un carré, de façon que l'un des sommets du triangle et l'un de ceux du carré coïncident.

Très facile. Il suffit de faire un angle $DAN = 15°$.

on peut aussi faire le calcul en posant $BM = x$, $CM = y$ on a alors $x^2 + a^2 = 2y^2$ et $x + y = a$: d'où

$$x = 2a \mp a\sqrt{3} \qquad y = \pm a\sqrt{3} - a$$

valeurs très faciles à construire. — Les signes inférieurs donnent une autre solution, comme le montre la seconde figure.

1508. Sur le Pentagone et le Décagone Réguliers.

— Pentagone. —

1°. Le côté du Pentagone p est

$$p = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

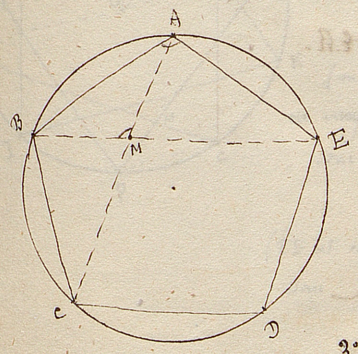
2°. Les diagonales du Pentagone Régulier se coupent en moyenne et extrême Raison.

Soient AC, BE deux diagonales. Le triangle AME est isocèle : car ses angles MAE et AME sont évidemment égaux. Donc

$$ME = AE = AB.$$

De plus, les triangles semblables BMA et BEA (angle B commun, et $\widehat{BMA} = \widehat{BAE}$) donnent

$$BM \cdot BE = \overline{AB}^2 = \overline{ME}^2$$



Donc

La diagonale BE est divisée en M en moyenne et extrême Raison — et son plus grand segment est égal au côté même du Pentagone.

3°. Il résulte de là que

$$ME = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

d'ailleurs, BE (qu'on pourrait calculer d'après cela) étant double de l'apothème du Décagone Régulier, on a

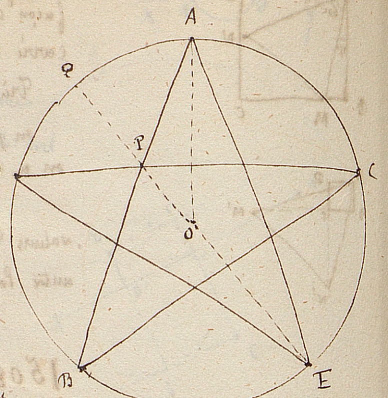
$$BE = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Enfin, comme le plus petit segment d'une droite a divisée en m. et extr. r. est $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$, on a

$$BM = \frac{R}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,(3 - \sqrt{5}) = R\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$$

2°. BE, que nous venons de trouver, est aussi le côté du Pentagone étoilé.

donc
$$AB = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$



Cherchons la surface de ce Pentagone Etoilé.

on a
$$AOP = \frac{R.OP}{2} \times \sin 36^\circ. \quad (1)$$

Calculons donc OP. or
$$PQ \,.\, PE = PC \,.\, PD$$
ou
$$(R - OP)(R + OP) = PC \,.\, PD$$
$$R^2 - \overline{OP}^2 = PC \,.\, PD.$$

PD et PC sont les segments d'une diagonale du pentagone ordinaire divisée en moy. et extr. raison. Nous venons de les trouver.

$$R^2 - \overline{OP}^2 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \times R\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{R^2}{2}\sqrt{(10-2\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})} = \frac{R^2}{2}\sqrt{70-30\sqrt{5}}$$
$$= \frac{R^2}{2}\sqrt{(3\sqrt{5}-5)^2} = \frac{R^2}{2}(3\sqrt{5}-5)$$

d'où
$$\overline{OP}^2 = R^2 - \frac{R^2}{2}(3\sqrt{5}-5) = \frac{R^2}{2}(7-3\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(14-6\sqrt{5}) = \frac{R^2}{4}(3-\sqrt{5})^2$$
$$OP = \frac{R}{2}(3-\sqrt{5})$$

Donc (OP est le plus petit segment du rayon divisé en M. et E. R. et par suite PQ est le côté du décagone.)

Remplaçant dans (1)
$$AOP = \frac{R^2}{4}(3-\sqrt{5})\sin 36^\circ = \frac{R^2}{4}(3-\sqrt{5}) \cdot \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$
$$= \frac{R^2}{16}\sqrt{200-88\sqrt{5}} = \frac{R^2}{8}\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$

Enfin, AOP étant le dixième de la surface cherchée, on a
$$\text{Surf. du Pentagone Etoilé} = \frac{5R^2}{4}\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$

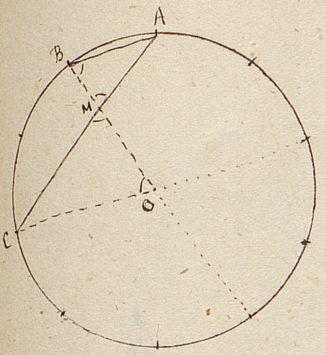
Décagone.

1°. Le côté du décagone est
$$d = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$
celui du décagone étoilé est
$$\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

C.à.d. qu'il est égal à $\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)+R$ ou au côté du décagone ordinaire, plus le Rayon.

Cela est facile à prouver par la Géométrie pure.

Car soit AB le côté du décagone ordinaire
" AC " " " étoilé.



Joignons OC, OB. Il est aisé de voir que les 2 angles marqués sur la figure sont égaux. Donc

$$AM = AB \quad , \quad CM = CO$$

d'où le principe cherché.

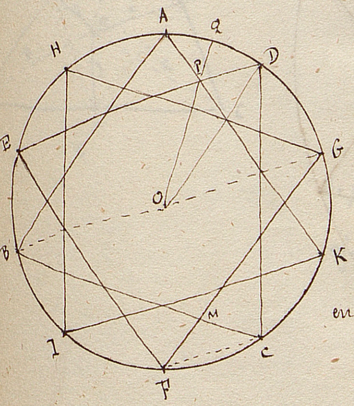
2°. Quelle est la Surface du Décagone Etoilé ?

Je construis ce Polygone.

Je chercherai comme ci-dessus la surface du triangle POD.

Pour calculer OP, j'ai besoin de connaître PE et PD.

Calculons donc leurs égaux MB et MC. — Joignons FC et BG (qui est un diamètre). On a



$$\frac{MC}{MB} = \frac{FC}{2R} \quad , \text{d'où} \quad \frac{MC}{BC} = \frac{FC}{2R+FC}$$

$$MC = \frac{FC \cdot BC}{2R+FC} = \frac{\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)\cdot\frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)}{2R+\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{R}{2}\,\frac{4}{4+\sqrt{5}-1} = \frac{2R}{3+\sqrt{5}}$$

$$MC = \frac{R}{2}(3-\sqrt{5}) = PD$$

(On peut donc remarquer que PD est le < segmt. du Rayon divisé en moy. et extr. raison).

Donc $MB = BC - MC = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) - \frac{R}{2}(3-\sqrt{5}) = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1-3+\sqrt{5})$

$$MB = R(\sqrt{5}-1) = PE$$

(PE est double du côté du décagone).

Donc $(R-OP)(R+OP) = PD \cdot PE = \frac{R}{2}(3-\sqrt{5})R(\sqrt{5}-1) = 2R^2(\sqrt{5}-2)$

$$\overline{OP}^2 = R^2 - 2R^2(\sqrt{5}-2) = R^2(5-2\sqrt{5})$$

$$OP = R\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Remplaçant

$$POD = \frac{R \cdot OP}{2}\sin 18° = \frac{R^2}{2}\sqrt{5-2\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1) = \frac{R^2}{8}\sqrt{(5-2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})}$$

$$POD = \frac{R^2}{8}\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$

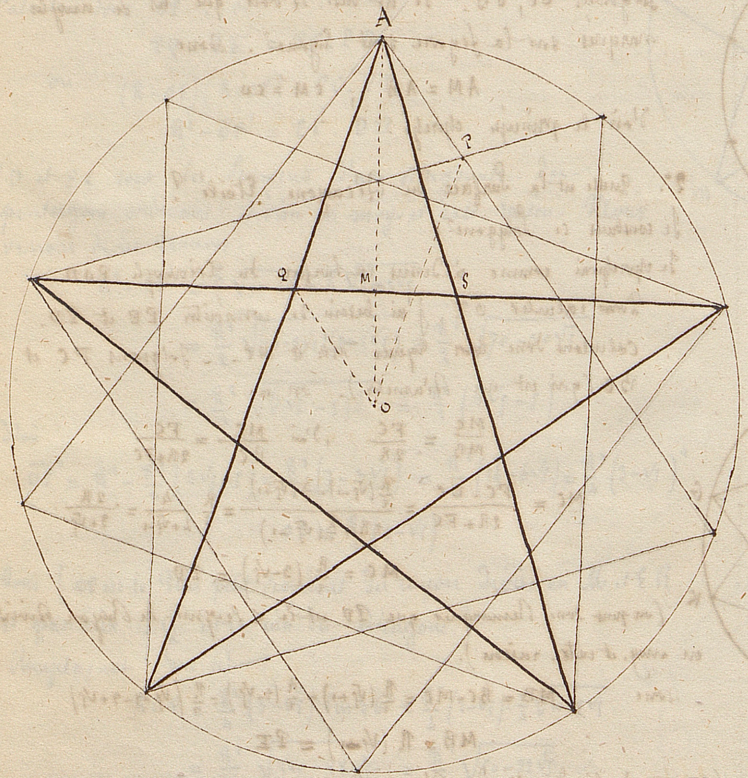
Multipliant par 20 :

Surface du Décagone Etoilé $= \frac{5R^2}{2}\sqrt{50-22\sqrt{5}}$

D'où ce Théorème remarquable

La Surface du Décagone Etoilé est Double de celle du Pentagone Etoilé. (VIII.)

C'est du reste extrêmement facile à prouver par la Géométrie la plus simple. — Formons en effet les deux polygones:



La figure APOQ est Evidem^t. un Parallelogramme. Donc AOP, 20e. du décagone Etoilé, égale AOQ, 10e du Pentagone Etoilé. donc.. c.q.f.d.

On voit même sur cette figure un nouveau moyen de calculer ces surfaces.

En effet, AP est le < segm^t. du Rayon divisé en M. et E.R. Donc. $OQ = AP = \frac{R}{2}(3-\sqrt5)$. .. D'ailleurs QS est le côté du pentagone inscrit dans le cercle de Rayon OQ. Donc $MQ = \frac{1}{2}\,\frac{OQ}{2}\sqrt{10-2\sqrt5} = \frac{R}{8}(3-\sqrt5)\sqrt{10-2\sqrt5} = \frac{R}{4}\sqrt{50-22\sqrt5}$. on en déduit

$$AOP = AOQ = \frac{R^2}{8}\sqrt{50-22\sqrt{5}}$$ comme précédemment.

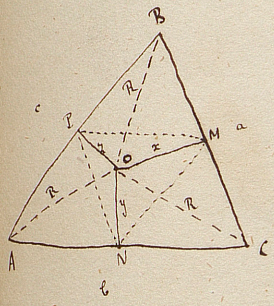
Hexagone Etoilé.

Il se compose de deux triangles équilatéraux emboîtés. – Sa surface, qui se trouve très-aisément, est

$$R^2\sqrt{3}.$$

1509. (Nouvelle démonstration du Théor. n°. 1482).

Théorème. – La somme des distances du centre du cercle circonscrit à un triangle, à ses trois côtés, est égale au rayon du cercle circonscrit, plus celui du cercle inscrit.



Dans tout quadrilatère inscrit le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés. – Donc, on a

dans le quadrilatère ONAP $\quad \frac{a}{2}R = \frac{b}{2}z + \frac{c}{2}y$ ou

$$aR = bz + cy$$

" " ONCM – $cR = ay + bx$

" " OPBM – $bR = cx + az$

De plus, on a $\quad (a+b+c)r = ax + by + cz$

ajoutant

$$(a+b+c)(R+r) = (a+b+c)(x+y+z)$$

$$x+y+z = R+r$$

c.q.f.d.

1510. Octogone Etoilé.

(Mêmes méthodes que n°. 1508). –

Son côté est $x = R\sqrt{2+\sqrt{2}}$ (celui de l'oct. ordin. est $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$).

Sa surface est

$$4R^2(\sqrt{2}-1)$$

Facile à construire.

1511. — On a

$$(1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots$$

Conséquences :

1°. $$\operatorname{Tg}^2 z = \sin^2 z\,(1-\sin^2 z)^{-1}$$
$$= \sin^2 z + \sin^4 z + \sin^6 z + \sin^8 z + \cdots$$

2°. $$\cot^2 z = \cos^2 z\,(1-\cos^2 z)^{-1}$$
$$= \cos^2 z + \cos^4 z + \cos^6 z + \cdots$$

3°. ~~Sin z~~ $\sec^2 z =$ ~~Sin z~~ $(1-\sin^2 z)^{-1}$
$$= 1+\sin^2 z+\sin^4 z+\cdots$$

4°. $$\operatorname{Coséc}^2 z = (1-\cos^2 z)^{-1}$$
$$= 1+\cos^2 z+\cos^4 z+\cdots$$

1512. (voir 1492).

Il faut éliminer a entre les deux équations

$$m\sin a = 1-\sin^2 a$$
$$n\cos a = 1-\cos^2 a.$$

On les écrit

$$m\sin a = \cos^2 a$$
$$n\cos a = \sin^2 a$$

d'où

$$\left\{\begin{array}{l} mn = \sin a\cos a = \dfrac{\operatorname{Tg} a}{1+\operatorname{Tg}^2 a} \\[2ex] \dfrac{m}{n}\operatorname{Tg}^3 a = 1 \end{array}\right.$$

et par suite

$$\frac{1}{mn} = \frac{1+\sqrt[3]{\left(\frac{n}{m}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{n}{m}}} = \sqrt[3]{\frac{m}{n}} + \sqrt[3]{\frac{n}{m}}$$

$$\frac{1}{m^2n^2} = \frac{m}{n} + \frac{n}{m} + \frac{3}{mn}$$

$$1 = m^2n^2(m^2+n^2+3)$$

Voir la Solution 1541.

1513. Résoudre l'équation

$$\sin x + \cos x = \tan x.$$

Élevons au carré :

$$1 + 2\sin x \cos x = \operatorname{tg}^2 x$$

$$1 + 2\frac{\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$$

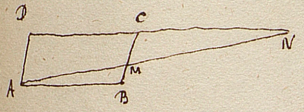
$$1 + \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x$$

$$\operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg} x - 1 = 0$$

Éq. du 4e degré qui a une racine comprise entre 1 et 2. et une entre 0 et −1.
(De quelque manière qu'on traite le problème, il conduit toujours à une éq. du 4e degré).

1514. On a un parallélogramme ABCD. Par A on mène une transversale quelconque. Trouver que

$$MB \cdot ND = \text{Const}.$$



Les triangles semblables AMB, CMN donnent

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{NC}, \quad \frac{MB}{MB+MC} = \frac{AB}{AB+NC} \quad \text{ou} \quad \frac{MB}{BC} = \frac{AB}{ND}$$

d'où enfin

$$MB \cdot ND = AB \cdot BC$$

1515. Trouver l'arc dont la tangente est $x+1$ et qui vaut 3 f. l'arc dont la tangente est $x-1$.
Les équations du problème sont

$$\operatorname{tg} y = x+1, \quad \operatorname{tg} z = x-1, \quad y = 3z \qquad \text{d'où} \qquad \operatorname{tg} 3z = x+1, \quad \operatorname{tg} z = x-1$$

et enfin

$$\operatorname{tg} 3z - \operatorname{tg} z = 2.$$

or on a
$$Tg\,3z = Tg\,z \,\frac{3 - Tg^2 z}{1 - 3\,Tg^2 z}$$

Substituant, l'Eq. devient

$$Tg\,z\,(3 - Tg^2 z) - Tg\,z\,(1 - 3\,Tg^2 z) = 2\,(1 - 3\,Tg^2 z)$$

posant $Tg\,z = v$.
$$v^3 + 3v^2 + v - 1 = 0$$
ou
$$(v+1)(v^2 + 2v - 1) = 0$$

d'où
$$v = Tg\,z = -1$$
et
$$v = Tg\,z = -1 \pm \sqrt{2}$$

La première valeur donne $v = -45°$. — D'ailleurs, comme l'Equation $v^2 + 2v - 1 = 0$ est celle qu'on trouve quand on donne $Tg\,a = 1$ et qu'on cherche $Tg\,\frac{a}{2} = v$, il est clair que ces deux dernières valeurs seront $v = 22°\,30'$ et $v = \frac{225°}{2} = 112°\,30'$.

D'ailleurs $x = Tg\,z + 1$, donc $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{2}$.

(Vdb.)

1516. — Si dans $f(x)$ on remplace $x^n, x^{n+1} \ldots$ par $a^n, a^{n+1} \ldots$ on a le reste de la division de $f(x)$ par $x^n - a^n$.

Soit
$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$
et posons
$$f_1(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_n x^n$$
$$f_2(x) = A_{n-1} x^{n-1} + \ldots + A_{m-1} x + A_m$$

Divisons $f_1(x)$ par $x^n - a^n$. on aura
$$f_1(x) = (x^n - a^n)\,Q + R$$

et il est clair que R est indépendant de x. Donc en faisant $x=a$ dans cette identité, il viendra

$$f_1(a) = R$$

or il est clair que, si l'on divise $f(x)$ par $x^n - a^n$ le reste sera $R + f_2(x)$, ou $f_1(a) + f_2(x)$.

c q f d.

1517. Les trois sommets $A\,B\,C$ d'un triangle et ceux $A'B'C'$ d'un tétraèdre sont donnés. Par un point qcq. M dans le plan du triangle ABC, on mène MA, MB, MC. on prend dans l'espace un point S tel que $SA' = MA$, $SB' = MB$ $SC' = MC$. — Le lieu des points S est une surface du 2^d. degré (Jacobi).

Prenons pour plan des xy celui du triangle ABC.

M a pour coordonnées variables (α, β)

A, B, C " fixes $(a\ a')$ (b, b') (c, c')

$S\ (x\,y\,z)$, $A'(m, n, p)$, $B'(m'\,n'\,p')$ $C'(m''\,n''\,p'')$

L'énoncé donne

$$(x-m)^2 + (y-n)^2 + (z-p)^2 = (\alpha-a)^2 + (\beta-a')^2$$

$$(x-m')^2 + (y-n')^2 + (z-n')^2 = (\alpha-b)^2 + (\beta-b')^2$$

$$(x-m'')^2 + (y-n'')^2 + (z-n'')^2 = (\alpha-c)^2 + (\beta-c')^2$$

Retranchant, on aura deux équations de la forme

$$Ax + By + Cz + D = M\alpha + N\beta + P$$

$$A'x + B'y + C'z + D' = M'\alpha' + N'\beta + P'$$

d'où

$$\alpha = Hx + Ky + Gz + Q$$

$$\beta = H'x + K'y + G'z + Q'$$

Reportant dans une des équations primitives, on aura évidemment un lieu du second degré (Nib.).

C q f D.

1518. Trois points A, B, C étant donnés, trouver dans leur plan un cercle tel que les tangentes menées des trois points forment des angles circonscrits donnés.

Soit o le centre du cercle cherché, et R son rayon. Il est clair qu'on connaît les rapports

$$\frac{OA}{R} = m$$

$$\frac{OB}{R} = n$$

$$\frac{OC}{R} = p$$

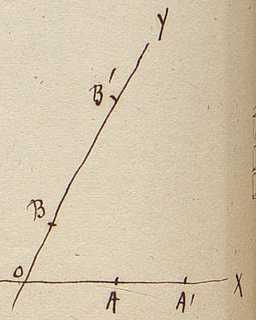
d'où

$$\frac{OA}{OB} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{OA}{OC} = \frac{m}{p}$$

ce qui permet de trouver le point o. La construction s'achève avec facilité. (Nib.)

1519. Lieu des centres des coniques passant par 4 points.



Soient A, A', B, B' les 4 points.

Eq. de la droite AB : $ay + bx - ab = 0$

" $A'B'$: $a'y + b'x - a'b' = 0$

Eq. du syst. de ces 2 droites : $(ay + bx - ab)(a'y + b'x - a'b') = 0$

" des deux axes : $xy = 0$

Donc l'éq. de toute conique passant par les 4 points sera

$$(ay + bx - ab)(a'y + b'x - a'b') + \lambda xy = 0$$

ou bien

$$aa'y^2 + bb'x^2 + (ab'+ba')xy + \lambda xy - aa'(b+b')y - bb'(a+a')x + aa'bb' = 0$$

Prenons les deux dérivées :

$$2aa'y + (ab'+ba')x + \lambda x - aa'(b+b') = 0$$
$$2bb'x + (ab'+ba')y + \lambda y - bb'(a+a') = 0$$

Si l'on tire x et y de ces deux équations, on aura les ~~les~~ coord. du centre. Mais si l'on élimine λ, on aura le lieu des centres. Pour cela, je multiplie la 1re. par y, la 2e. par x, et je retranche :

$$2aa'y^2 - 2bb'x^2 - aa'(b+b')y + bb'(a+a')x = 0$$

Equation d'une conique qui passe par l'origine, et qui par conséquent doit aussi passer par le point de rencontre de AB et $A'B'$: – il est du reste aisé de le voir à priori.

N.M.

1520. Concours Général (1855).

Math. Spéciales : Résoudre l'Equation

$$1,3\ \mathrm{Tg}\,x - \mathrm{Log.\,Tg}\left(45^\circ + \frac{x}{2}\right) = 0,31416.$$

Logique (Sciences). Construire un triangle connaissant l'angle au sommet, la hauteur, et la médiane.

Résoudre un quadrilatère dont deux angles opposés sont droits, connt. un des 2 autres angles et les deux côtés qui le comprennent : trouver les autres côtés et les diagonales.

Logique (Lettres). Les 3 circonf. qui ont pour diam. les côtés d'un triangle, se coupent sur ces côtés, prolongés s'il le faut. Discuter.

1521. Éliminer φ entre

$$\begin{cases} x = R(\varphi - \sin\varphi) \\ y = R(1 - \cos\varphi) \end{cases}$$

La seconde donne

$$\cos\varphi = \frac{R-y}{R}$$

et

$$\varphi = \text{arc}\cos\frac{R-y}{R}$$

Reportant dans la première :

$$x = R\ \text{arc}\cos\frac{R-y}{R} - R\sqrt{1 - \frac{(R-y)^2}{R^2}}$$

$$x = R\ \text{arc}\cos\frac{R-y}{R} - \sqrt{y(2R-y)}$$

$$\frac{x + \sqrt{y(2R-y)}}{R} = \text{arc}\cos\frac{R-y}{R}$$

$$\frac{R-y}{R} = \cos.\frac{x + \sqrt{y(2R-y)}}{R}$$

1522. On donne

$$\operatorname{tg} x = \frac{a + b\cos\alpha}{b\sin\alpha}$$

Calculer $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)$.

On a

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\frac{a+b\cos\alpha}{b\sin\alpha} + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a+b\cos\alpha}{b\sin\alpha}} = \frac{a + b\cos\alpha + b\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{b\sin\alpha - a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - b\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{a + b\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right) + 2b\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2b\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} - a\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} - b\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

$$= \frac{(a+b)\cos\frac{\alpha}{2}}{2b\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2} - a\sin\frac{\alpha}{2} - b\sin\frac{\alpha}{2} + 2b\sin^3\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{b+a}{b-a}\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}.$$

V.M.

1523. Résoudre

$$\sin x + \cos x = 2\sin(a+x).$$

En développant :

$$\sin x + \cos x = 2 \sin a \cos x + 2 \cos a \sin x$$

Divisant par $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x + 1 = 2 \sin a + 2 \cos a \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1 - 2 \sin a}{2 \cos a - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \sin a}{\cos a - \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{\sin 30^\circ - \sin a}{\cos a - \cos 60^\circ}$$

qu'il est facile de transformer en produit.

1524. Résoudre

$$\frac{\operatorname{tg} x}{(1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{sec} x)^2} = m$$

Je multiplie les deux termes de la fraction par $\cos^2 x$:

$$\frac{\sin x \cos x}{(\cos x + \sin x + 1)^2} = m$$

et en développant

$$\sin x \cos x = m \left(2 + 2 \sin x \cos x + 2 \sin x + 2 \cos x\right)$$

$$\sin x \cos x (1 - 2m) - 2m = 2m (\sin x + \cos x)$$

élevant au carré

$$\sin^2 x \cos^2 x (1-2m)^2 - 4m (1-2m) \sin x \cos x + 4m^2 = 4m^2 + 8m^2 \sin x \cos x$$

$$\sin x \cos x (1-2m)^2 - 4m(1-2m) = 8m^2$$

$$\sin x \cos x = \frac{4m(1-2m) + 8m^2}{(1-2m)^2} = \frac{4m}{(1-2m)^2}$$

$$\sin 2x = \frac{8m}{(1-2m)^2}$$

1525. Résoudre

$$a \sin(A-x) + b \sin(B-x) = 0$$

on tire de là

$$\frac{\sin(A-x)}{\sin(B-x)} = -\frac{b}{a}$$

$$\frac{\sin(A-x) - \sin(B-x)}{\sin(A-x) + \sin(B-x)} = \frac{b+a}{b-a} = \frac{\operatorname{Tg}\frac{A-B}{2}}{\operatorname{Tg}\left(\frac{A+B}{2} - x\right)}$$

$$\operatorname{Tg}\left(\frac{A+B}{2} - x\right) = \frac{b-a}{b+a} \cdot \operatorname{Tg}\frac{A-B}{2}$$

1526. Résoudre

$$\sin(x+1) - \cos(x+1) = \sin x$$

En développant, puis divisant par $\cos x$, on a

$$\operatorname{Tg} x = \frac{\cos 1 - \sin 1}{\cos 1 + \sin 1 - 1}$$

d'où

$$\frac{\operatorname{Tg} x - 1}{\operatorname{Tg} x + 1} = \operatorname{Tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 - 2\sin 1}{2\cos 1 - 1} = \frac{\sin\frac{\pi}{6} - \sin 1}{\cos 1 - \cos\frac{2\pi}{6}}$$

et en transformant en produit

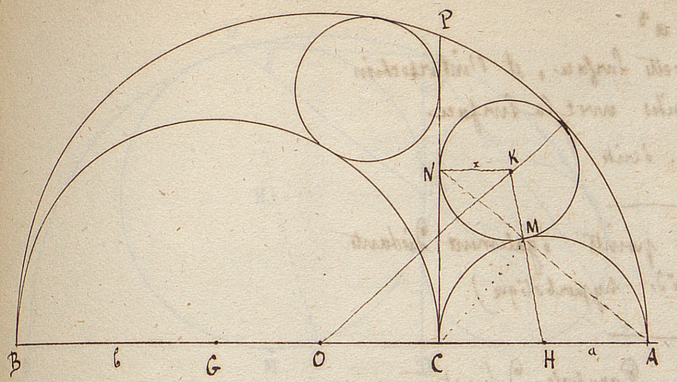
$$\operatorname{Tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\right)}$$

$$\operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sin\frac{6-\pi}{12}\cos\frac{6+\pi}{12}}{\sin\frac{\pi-3}{6}\sin\frac{\pi+3}{6}}$$

1527. On donne une demi-circonférence et une ordonnée au diamètre. On décrit sur les deux segments du diamètre deux demi-circonférences. Puis on décrit deux cercles tangents à l'ordonnée, aux demi-cercles décrits, et à la demi-circonférence donnée :

Ces deux cercles ont même rayon.

Soit en effet $x = KN$ le rayon d'un de ces cercles,



Soit encore $HA = a$

$GB = b$

Il est clair d'abord que les 3 points N, M, A sont en ligne droite, à cause de la similitude des 2 Tr. isocèles NKM, HMA, qui ont même angle au sommet. On aura donc

$$\frac{x}{a} = \frac{MN}{MA}$$

d'où

$$MN = \frac{x}{a} . AM$$

Si maintenant on joint CM, CM sera perp. sur AN. Donc

$$AM . AN = \overline{AC}^2$$

ou

$$AM(AM + MN) = 4a^2$$

$$\overline{AM}^2 + AM . MN = 4a^2$$

et en remettant la valeur trouvée pour MN

$$\overline{AM}^2 + \frac{x}{a}\overline{AM}^2 = 4a^2$$

$$\overline{AM}^2 = \frac{4a^3}{a+x} \qquad (1)$$

Maintenant, le triangle MHA donne

$$\overline{AM}^2 = 2a^2 - 2a^2 \cos MHA \qquad (2)$$

et le triangle OKH

$$\overline{OK}^2 = \overline{OH}^2 + \overline{KH}^2 + 2 . OH . KH \cos MHA$$

ou

$$(a+b-x)^2 = b^2 + (a+x)^2 + 2b(a+x) \cos MHA \qquad (3)$$

Les Eq. (1), (2) et (3) donnent donc

$$\frac{4a^3}{a+x} = 2a^2 - 2a^2 \frac{(a+b-x)^2 - (a+x)^2 - b^2}{2b(a+x)}$$

d'où l'on tire

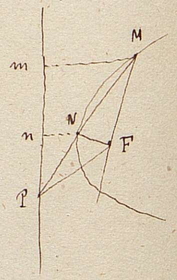
$$x = \frac{ab}{a+b}$$

valeur symétrique en a et b. Donc l'autre cercle a le même rayon (Nlle).

1528. On donne l'Equation
$$x^3+y^3+z^3=a^3$$
Trouver les Droites situées sur cette Surface, et l'intersection des plans passant par ces Droites avec la Surface
(Ecole Polyt. 1855. Comp. écrite).

1529. Trouver le lieu des points également distants de deux droites (Paraboloïde hyperbolique).

1530. Etant donnée une Parabole, démontrer que si l'on joint deux points M et N de la courbe, et qu'on prolonge jusqu'à la rencontre P de la directrice, la ligne PF qui joint ce point de rencontre au foyer divise en deux parties égales l'angle formé par l'un des rayons vecteurs et par le prolongement de l'autre. (Concours Gén. 1855. Rhétor. Scientif.)

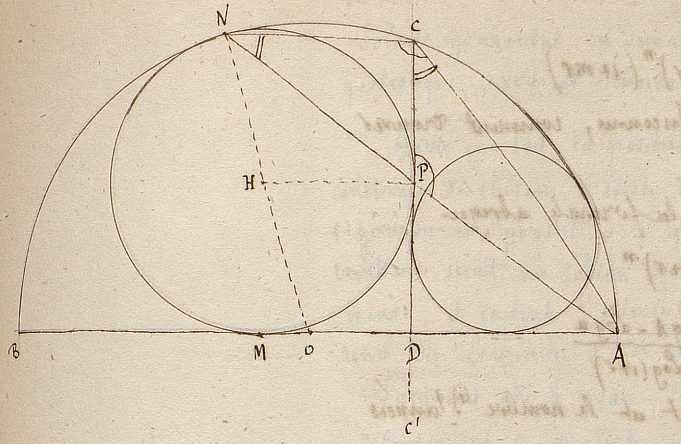


C'est évident, car
$$\frac{PM}{PN}=\frac{Pm}{Pn}=\frac{Mm}{Nn}=\frac{FM}{FN}$$
on en conclut une propriété connue si la sécante MN devient tangente.

1531. On donne un diamètre, une demi-circonférence, et une ordonnée au diamètre. décrire une circonférence tangente au diamètre, à l'ordonnée, et à la demi-circonférence.

Je suppose le problème résolu. Soit H le centre d'un des cercles demandés.

Il est d'abord évident que les trois points



~~N, P, A sont en ligne droite, à cause des 2 triangles isocèles semblables NHP, NOA.~~

~~Cela posé, on a~~

~~angle $NCA = \dfrac{\text{arc } NB + \frac{1}{2}\text{ Circf.}}{2}$~~

~~et, en appelant C' le symétrique de C par rapport à AB~~

~~angle $CPA = \dfrac{\text{arc } NB + \text{arc } BC' + \text{arc } C'A}{2}$~~

~~$= \dfrac{\text{arc } NB + \text{arc } BC' + \text{arc } C'A}{2}$~~

~~$= \dfrac{\text{arc } NB + \frac{1}{2}\text{ Circf.}}{2}$~~

~~Donc les deux triangles angle NCA = angle CPA~~

Cela posé, les deux angles N et C marqués sont évidemt. égaux comme ayant pour mesures respectives la moitié de l'arc CA et la moitié du symétrique. — Donc les deux triangles ACP, ACN sont semblables, et donnent

$$\overline{AC}^2 = AP . AN$$

par suite, comme $AP . AN = \overline{AM}^2$, on a

$$AC = AM$$

Le point M est donc facile à trouver, et comme H est sur la bissectrice de l'angle D, la construction s'achève aisément (MM.).

1532. Th. Si quatre forces se font équilibre, toute droite qui rencontre trois d'entre elles rencontre la quatrième. (Ec. Pol. Q. Dex.)

En effet, la droite peut être supposée fixe sans que cela dérange l'équilibre. Les 3 forces qu'elle rencontre sont détruites. Donc la 4e doit être aussi détruite : donc...

1533. — Sur les Intérêts Composés.

La formule Générale est

$$A = a(1+r)^n(1+mr)$$

Supposons que le temps soit Inconnu, comment trouver n et m?

On sait que si l'on prend la formule abrégée

$$A = a(1+r)^n$$

d'où

$$n = \frac{\operatorname{Log} A - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log}(1+r)}$$

la partie entière du quotient est le nombre d'années cherché.

Cela posé, on a en Général

$$\operatorname{Log} A = \operatorname{Log} a + n \operatorname{Log}(1+r) + \operatorname{Log}(1+mr)$$

d'où

$$n = \frac{\operatorname{Log} A - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log}(1+r)} - \frac{\operatorname{Log}(1+mr)}{\operatorname{Log}(1+r)}$$

effectuons la division de $\operatorname{Log} A - \operatorname{Log} a$ par $\operatorname{Log}(1+r)$. La partie entière sera n et le reste R. alors

$$\frac{\operatorname{Log} A - \operatorname{Log} a}{\operatorname{Log}(1+r)} = n + \frac{R}{\operatorname{Log}(1+r)}$$

Remplaçons dans l'égalité précédente :

$$n = n + \frac{R}{\operatorname{Log}(1+r)} - \frac{\operatorname{Log}(1+mr)}{\operatorname{Log}(1+r)}$$

d'où

$$R = \operatorname{Log}(1+mr)$$

on aura donc immédiatement $\operatorname{Log}(1+mr)$, par suite $1+mr$ et enfin m.

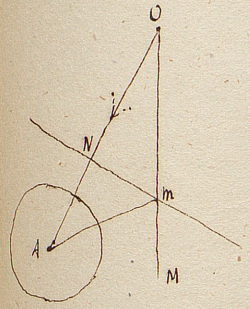
(Ch. Forestier).

1534. Problème. — Sachant exécuter un Cadran Solaire horizontal, on demande de construire un cadran plan quelconque, vertical déclinant, ou non vertical.

Quelle que soit la position du plan sur lequel on veut construire le cadran, il existe toujours un point de la terre dont l'horizon est parallèle à ce plan, et où le cadran qu'on veut construire serait un cadran horizontal : — on peut donc le construire, et la seule difficulté est de tenir compte de la différence des Longitudes et de celle des Latitudes.

Supposons que le plan donné soit celui du papier.

Plantons en O un Style parallèle à l'axe du monde. Soit ON sa projection sur le plan. ON est la méridienne du lieu où le cadran serait horizontal, et l'angle du Style avec ON serait la Latitude. Pour construire le cadran horizontal, il faudrait donc avoir recours à un cadran Equinoxial auxiliaire dont le centre serait rabattu en un point A facile à déterminer.



OmM s'obtient aisément : m est le pied de la verticale menée par un point qcq. du Style, avec le fil à plomb par ex.

Cela posé, soit OmM ~~la ligne de plus grande pente du plan.~~ ~~Etant~~ ~~sont~~ l'intersection du plan avec notre méridien. C'est donc notre ligne de midi. Joignons Am.

Il est clair d'après cela que si l'on mène par A des droites faisant avec Am des angles de 15°, 30°, ... et qu'on joigne O à leurs intersections avec Nm, on aura les lignes horaires du cadran cherché.

(Nlle)

1535. Théorème. — Si, considérant successivement deux à deux trois cercles tracés sur un même plan, on détermine, pour chaque Système de deux Cercles, les deux centres de Similitude, interne et externe, et que, dans chaque Système, on fasse de la Distance entre ces deux Centres

le Diamètre d'un nouveau cercle, – les trois cercles ainsi obtenus passent par les deux mêmes points.

(proposé dans les ann. de Gergonne).

On sait que le cercle dont le diamètre est la distance des deux C. de S. de deux autres cercles est le Lieu Géom. des points dont le rapport des distances aux centres de ceux-ci est égal au rapport de leurs Rayons.

Soient donc A, B, C les centres des 3 cercles donnés, a, b, c leurs rayons.

Le cercle donné par le système A et B, et le cercle donné par le système A et C se coupent généralement en deux points.

Soit M un de ces points, on aura :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{a}{b}$$

$$\frac{MA}{MC} = \frac{a}{c}$$

d'où

$$\frac{MB}{MC} = \frac{b}{c}$$

Donc M appartient à la circonférence donnée par le système B et C, c q f d. (Nlle.)

1536. – Sur les ~~les~~ Caractères de Divisibilité.

Th. Tout nombre = m9 + la somme de ses chiffres.

$$3472 = 347 \times 10 + 2$$

$$= 347 \times 9 + 347 + 2$$

$$= m.9 + 347 + 2$$

De même

$$347 = m9 + 34 + 7$$

$$34 = m9 + 3 + 4$$

Donc

$$3472 = m\,9 + 3+4+7+2$$

C. J. L. (Abondot)

La même méthode s'applique à un diviseur qcq. Soit 11.

$$76548329 = 765483 \times 100 + 29$$
$$= 765483 \times 99 + 765483 + 29$$
$$= m.11 + 765483 + 29$$

Par suite

$$76548329 = m.11 + 76 + 54 + 83 + 29$$

Si je considère que 22, 33, 44 ... 88 sont m. 11, je prendrai, au lieu de

$$76 + 54 + 83 + 29$$

les restes

$$76 - 66,\ 54 - 44,\ 83 - 77,\ 29 - 22$$

ou

$$10 + 10 + 6 + 7$$

ou

$$33 = m.11$$

Donc le nombre est divisible par 11.

1537. On donne 2 droites dans l'espace, A, B, A', B'. — Déterminer le plan sur lequel leurs projections formeraient un parallélogramme.

Par A et A' je mène un système de 2 plans parallèles ; — de même par B et B' : le plan cherché doit être perp. aux deux systèmes, et par suite à leurs intersections, qui sont parallèles. (Ille)

1538. Trouver la Somme

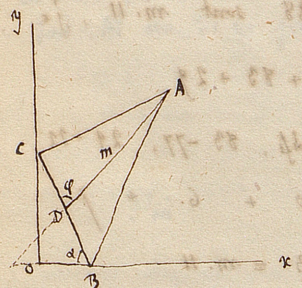
$$\frac{1}{1.2.3\ldots m} + \frac{1}{1.\,1.2.3\ldots(m-1)} + \frac{1}{1.2\,.\,1.2.3\ldots(m-2)} + \cdots + \frac{1}{1.2.3\ldots m}$$

Cette Somme est égale à

$$\frac{1}{1.2\ldots m}\left\{1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1.2} + \cdots\cdots 1\right\}$$

ou $\frac{1}{1.2\ldots m}(1+1)^m = \frac{2^m}{1.2.3\ldots m}$.

1539. Une droite BC, base d'un triangle donné, roule dans un angle droit. On demande le lieu du Sommet. (Problème de Comte, fort joli).



Je pose $BC = a$, la médiane $AD = m$ et $CDA = \varphi$. Soit l'angle α pris pour variable auxiliaire.

Je projette le contour ADC sur l'axe des x. J'aurai

$$m \cos(180 - \varphi - \alpha) = x - \frac{a}{2}\cos\alpha$$

Je projette ADB sur oy :

$$m \sin(180 - \varphi - \alpha) = y - \frac{a}{2}\sin\alpha$$

Ces deux éq. peuvent s'écrire

$$\begin{cases} -m\cos(\varphi+\alpha) = x - \frac{a}{2}\cos\alpha \\ m\sin(\varphi+\alpha) = y - \frac{a}{2}\sin\alpha \end{cases}$$

Développant et ordonnant

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{2} - m\cos\varphi\right)\cos\alpha + m\sin\varphi\sin\alpha = x \\ m\sin\varphi\cos\alpha + \left(m\cos\varphi + \frac{a}{2}\right)\sin\alpha = y \end{cases}$$

D'où je tire

$$\left\{\begin{aligned} \cos\lambda &= \frac{\left(m\cos\varphi+\frac{a}{2}\right)x - my\sin\varphi}{\frac{a^2}{4}-m^2} \\ \sin\lambda &= \frac{\left(\frac{a}{2}-m\cos\varphi\right)y - mx\sin\varphi}{\frac{a^2}{4}-m^2} \end{aligned}\right.$$

élevant au carré, et ajoutant

$$\left(\frac{a^2}{4}-m^2\right)^2 = \left(m^2+\frac{a^2}{4}+am\cos\varphi\right)x^2 + \left(m^2+\frac{a^2}{4}-am\cos\varphi\right)y^2 - 2amxy\sin\varphi$$

C'est l'Equation du lieu. – Elle représente une Ellipse rapportée à son centre.

Cherchons la direction du grand axe. On a en général $\operatorname{Tg} 2\lambda' = -\frac{B}{A-C}$. On trouve ici

$$\operatorname{Tg} 2\lambda' = -\operatorname{Tg}\varphi = \operatorname{Tg}(180-\varphi)$$

$$\lambda' = \frac{180-\varphi}{2}$$

Donc le grand axe fait avec Ox un angle moitié de ADB. On pouvait du reste le voir Géométriquement ; car si l'on joint OD, cette ligne est de longueur constante ainsi que DA. Donc OA sera le plus grand possible quand OD et DA seront dans le prolongement l'un de l'autre, d'où il est facile de conclure la direction du grand axe.

Si $m=0$, l'Eq. se réduit à

$$x^2+y^2=\frac{a^2}{4}$$

c'est le cercle lieu des points D.

Le lieu devient une Droite si l'on a $m=\frac{a}{2}$, c.a.d. si le triangle donné est rectangle. L'Eq. devient alors

$$x^2(1+\cos\varphi) + y^2(1-\cos\varphi) - 2xy\sin\varphi = 0$$

ou

$$x^2\cos^2\frac{\varphi}{2} + y^2\sin^2\frac{\varphi}{2} - 2xy\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = 0$$

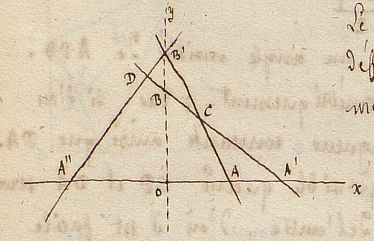
prenant la racine $\quad x\cos\frac{\varphi}{2} - y\sin\frac{\varphi}{2} = 0$

c'est justement l'équation du grand axe de l'ellipse dans le cas général.

On peut encore démontrer que la normale au lieu s'obtient en joignant A au 4e. sommet du rectangle dont COB est la moitié.

Enfin, il est facile de passer de là au cas de l'épicycloïde engendrée par un point lié à un cercle qui roule dans un autre cercle de rayon double.

1520. Théorème. — Quatre droites qui se coupent déterminent 4 triangles. Les 4 points de rencontre des hauteurs sont en ligne droite. (voir 446 la dém. géométrique).



Le choix des axes est suffisamment défini par la figure : ils sont pris de manière à démontrer le théorème pour les deux grands triangles AB'A'', A'DA'', et l'un des deux petits, AA'C.

Je détermine la position des 4 droites en me donnant $OA = a$ $OA' = a'$ $OA'' = a''$ $OB = b$ $OB' = b'$ ($a'' < 0$ sur la fig.) — on aura

Dans le triangle	abaissées du point	sur	Équations des hauteurs	
AB'A''	A	A''B'	$y = \frac{a''}{b'}(x-a)$	(1)
	B'	AA''	$x = 0$	
A'DA''	A'	B'A''	$y = \frac{a''}{b'}(x-a')$	(2)
	A''	BA'	$y = \frac{a'}{b}(x-a'')$	
AA'C	A	A'B	$y = \frac{a'}{b}(x-a)$	(3)
	A'	AB'	$y = \frac{a}{b'}(x-a')$	

Les coordonnées du point de rencontre des droites (1) sont

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\dfrac{aa''}{b'} \end{cases}$$

Pour les droites (2), un calcul d'élimination très-facile donne

$$\begin{cases} x = a'a'' \dfrac{b - b'}{a''b - a'b'} \\ y = a'a'' \dfrac{a' - a''}{a''b - a'b'} \end{cases}$$

Pour les droites (3), en changeant b en b', b' en b, et diminuant d'une unité les accents de a,

$$\begin{cases} x = aa' \dfrac{b' - b}{a'b' - ab} \\ y = aa' \dfrac{a - a'}{a'b' - ab} \end{cases}$$

Or le critérium connu permet de vérifier très-aisément que ces trois points sont en ligne droite.

N.M.

1541. Résoudre

$$\sin x + \cos x = \operatorname{tg} x$$

(Très-joli problème).

Posons

$$\operatorname{tg} x = y$$

On aura

$$\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = y$$

D'où

$$y + \sqrt{1+y^2} = y\sqrt{1+y^2}$$

$$y = (y-1)\sqrt{1+y^2}$$

Elevant au carré, et introduisant par cela même les solutions de l'Equation 1 ~~[illegible]~~ $- \text{Sin}\,x = \text{Tg}\,x$, j'aurai

$$y^2 = (y^2 - 2y + 1)(1 + y^2)$$
$$= y^2 - 2y + 1 + y^4 - 2y^3 + y^2$$

$$y^4 - 2y^3 + y^2 - 2y + 1 = 0 \qquad (1)$$

Eq. réciproque. – Je divise par y^2

$$y^2 + \frac{1}{y^2} - 2\left(y + \frac{1}{y}\right) + 1 = 0$$

Je pose

$$y + \frac{1}{y} = z \qquad (2)$$

d'où

$$y^2 + \frac{1}{y^2} = z^2 - 2$$

Reportant

$$z^2 - 2z - 1 = 0$$

$$z = 1 \pm \sqrt{2}$$

D'ailleurs l'Eq. (2) donne

$$y = \frac{z \pm \sqrt{z^2 - 4}}{2}$$

Je remplace z par sa valeur : j'aurai $z^2 - 4 = -1 \pm 2\sqrt{2}$, ce qui me montre qu'il y a deux racines imaginaires, et qu'il faut prendre seulement $z = 1 + \sqrt{2}$ et $z^2 - 4 = -1 + 2\sqrt{2}$. alors

$$y = \frac{1 + \sqrt{2} \pm \sqrt{-1 + 2\sqrt{2}}}{2}$$

Je remarque immédiatement que l'Eq. en y, qui est $y^2 - zy + 1 = 0$, montre que les deux racines ont pour produit 1, et sont les tangentes de deux angles complémentaires.

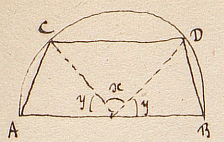
Achevant le calcul, je trouve

$y' = \text{Tg}\,x' = 1{,}883203 \qquad x' = 62^\circ\ 1'\ 52'',5$ qui convient

$y'' = \text{Tg}\,x'' = 0{,}531010 \qquad x'' = 27^\circ\ 58'\ 7'',5$ qui répond à l'Eq. ~~[illegible]~~ $- \text{Sin}\,x = \text{Tg}\,x$, comme il est facile de le voir.

(NW.)

1542. — Trapèze Maximum Inscrit dans une Demi-circonférence.



$$\frac{1}{2} R^2 \sin x + R^2 \sin y = m$$

$$x + 2y = 180^\circ$$

$$\sin x = \sin 2y$$

Donc il suffit de rendre maximum

$$\frac{1}{2} \sin 2y + \sin y$$

ou

$$\sin y \cos y + \sin y$$

$$\sin y \,(1 + \cos y)$$

$$\sin y \cos^2 \frac{y}{2}$$

$$\sin \frac{y}{2} \cos^3 \frac{y}{2}$$

ou enfin

$$\sin^2 \frac{y}{2} \cos^6 \frac{y}{2}$$

Mais $\sin^2 \frac{y}{2} + \cos^2 \frac{y}{2} = 1$. Donc on devra avoir

$$\frac{\sin^2 \frac{y}{2}}{\cos^2 \frac{y}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$tg^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{3} \qquad tg\, y = \sqrt{3}$$

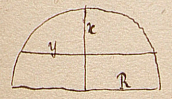
$$\sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = 60^\circ$$

Donc le trapèze maximum est un demi-Hexagone régulier.

(Vill.)

1543. Problème. — Diviser un Hémisphère en deux parties équivalentes par un plan parallèle à la base.



L'Eq. du problème sera

$$\frac{1}{2} \pi y^2 x + \frac{1}{6} \pi x^3 = \frac{1}{3} \pi R^3$$

ou

$$3y^2 x + x^3 = 2R^3 \quad (1)$$

avec la Relation
$$y^2 = x(2R-x)$$

L'Eq. (1) devient donc
$$3x^2(2R-x) + x^3 = 2R^2$$
ou
$$x^3 - 3Rx^2 + R^3 = 0 \qquad (2)$$

Pour Résoudre cette Equation, je fais disparaître le second terme, et je pose
$$\left.\begin{aligned} y &= x - R \\ \text{d'où} \quad x &= y + R \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et l'Eq. devient
$$(y+R)^3 - 3R(y+R^2) + R^3 = 0$$

développant et Réduisant,
$$y^3 - 3R^2y - R^3 = 0 \qquad (4)$$

Je compare cette Equation avec celle qui donne $\cos\frac{a}{3}$ en fonction de $\cos a$ et qui est
$$z^3 - \frac{3}{4}z - \frac{b}{4} = 0 \qquad \left\{ \begin{aligned} b &= \cos a \\ z &= \cos\frac{a}{3} \end{aligned}\right.$$

et pour l'identifier à (4), je pose
$$y = mY$$

L'Eq. (4) devient
$$m^3Y^3 - 3R^2mY - R^3 = 0$$
ou
$$Y^3 - 3\left(\frac{R}{m}\right)^2 Y - \left(\frac{R}{m}\right)^3 = 0 \qquad (5)$$

et je pose
$$\left(\frac{R}{m}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad \left(\frac{R}{m}\right)^3 = \frac{b}{4}$$

d'où
$$\frac{R}{m} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad ~~R = 2m~~ \quad m = 2R$$
$$\frac{b}{4} = \left(\frac{R}{2R}\right)^3 = \frac{1}{8}, \quad b = \frac{1}{2}$$

ainsi
$$\left\{ \begin{aligned} m &= 2R \\ b &= \frac{1}{2} \end{aligned}\right.$$

avec ces valeurs, l'Eq. en Y, (5), sera celle qui donne

$\cos\frac{a}{3}$, connaissant $\cos a = b = \frac{1}{2} = \cos 60°$. Donc ses trois racines sont

$$y = \cos\frac{a}{3} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{a}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{a}{3}\right)$$

$$y = \cos 20° = \cos 140° = \cos 260°$$

$$y = \cos 20° = -\cos 40° = -\cos 80°$$

Donc les 3 valeurs de y sont

$$y = \begin{cases} 2R\cos 20° \\ -2R\cos 40° \\ -2R\cos 80° \end{cases}$$

et celles de x $(x = y + R)$

$$x = \begin{cases} R(1+2\cos 20°) \\ R(1-2\cos 40°) \\ R(1-2\cos 80°) \end{cases}$$

La 1ère valeur est $> R$ et ne convient pas; la seconde est évidemment négative et ne convient pas davantage, donc on ne doit prendre que la troisième

$$x = R(1-2\cos 80°)$$

Il en résulte que la hauteur h du segment adjacent à la base de l'hémisphère est $(h = R - x)$

$$h = 2R\cos 80°$$

d'où $\frac{h}{2} = R\cos 80°$, ce qui donne une construction simple pour avoir $\frac{h}{2}$ et par suite h. (Vab.)

1544. Sur les trois côtés d'un triangle quelconque ABC on décrit des carrés.

Voici les diverses propriétés de cette figure.

1°. CK et BF se coupent sur la hauteur AL (démontré n°. 52).

Il y a de même deux points analogues à M : ce sont N et P.

2°. BG et CH se coupent à angle droit au point Q. (Voir n°. 52).

3°. KF passe au point Q (V. 52) et bissecte l'angle HQB.

4°. AQ est perp. sur KF (id.).

5°. La droite AQ est bissectrice de l'angle A du triangle ABC. — En effet, la droite AQO, perp. sur KF qui est la bissectrice de l'angle HQB, est elle-même celle de l'angle supplémentaire (et droit) BQC. Donc

$$\text{angle } BQO = OQC$$

Mais à cause des angles extérieurs,

$$\text{angle } BQO = BAQ + ABQ$$

$$\text{angle } OQC = CAQ + ACQ$$

Les seconds membres sont donc égaux : et, comme on a angle $ABQ = ACQ$ à cause de l'égalité évidente des deux triangles ABG et ACH, il en résulte que

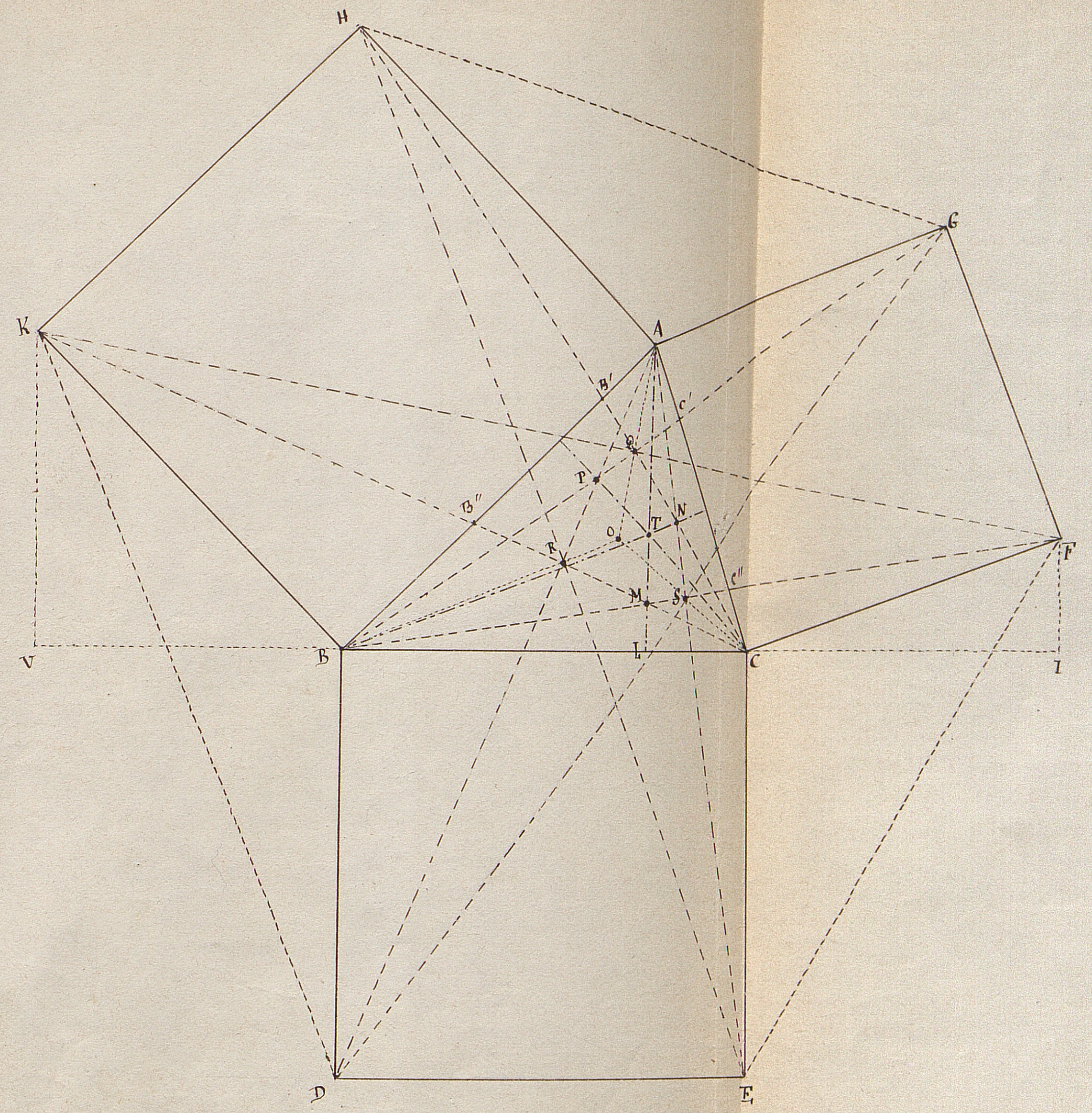
$$\text{angle } BAQ = CAQ$$

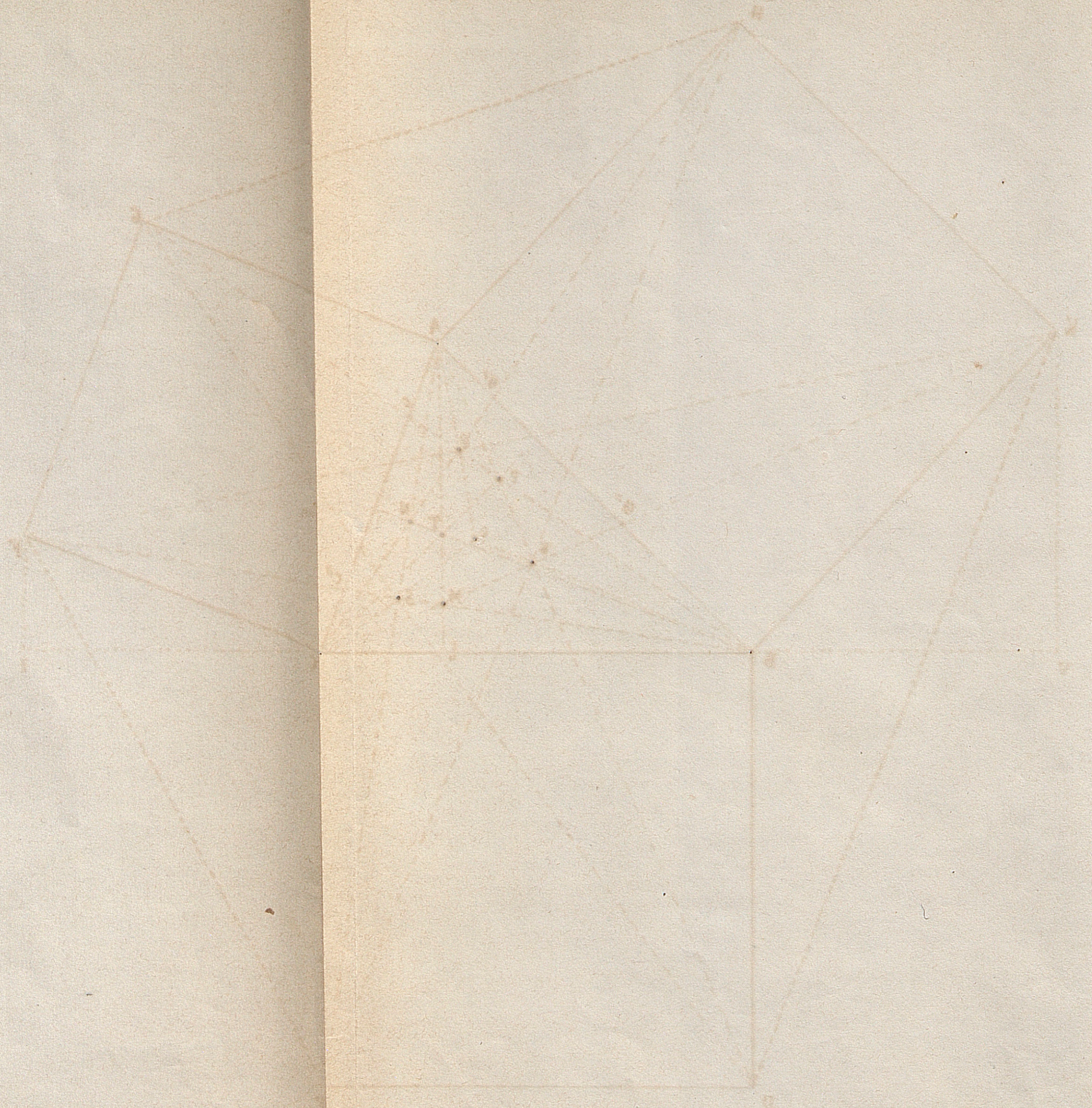
et AQ est bien bissectrice de A c.q.f.d.

Comme conséquence, on voit que les trois droites AQ, BR, CS se coupent en un même point, qui est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

6°. Les segments AB' et AC' sont inversement proportionnels aux côtés sur lesquels ils se trouvent. — Cela résulte

47 bis





immédiatement de l'inspection des triangles semblables $AB'C$ et $AC'B$.

7°. $B'B''$ a une valeur simple. Car les deux triangles semblables $CB'B''$ et CHK donnent

$$\frac{B'B''}{c} = \frac{h_c}{h_c+c}$$

$$B'B'' = \frac{2S}{c+h_c}$$

on aurait de même

$$C'C'' = \frac{2S}{b+h_b}$$

on voit que, pour que ces deux valeurs soient égales, il faut que l'on ait

$$c + h_c = b + h_b$$

ou

$$c + \frac{2S}{c} = b + \frac{2S}{b}$$

$$bc^2 + 2bS = b^2c + 2cS$$

ou

$$bc(c-b) - 2S(c-b) = 0$$

$$(2S - bc)(c-b) = 0$$

Donc $b = c$ ou $S = \frac{bc}{2}$, c.a.d. que le triangle doit être isocèle ou rectangle. — Dans ce dernier cas AB' et AC' sont nuls, et $AB'' = AC''$.

8°. Les trois triangles extérieurs AGH, BKD, CFE sont équivalents entre eux et au proposé, (voir 52).

9°. La somme $\overline{GH}^2 + \overline{DK}^2 + \overline{FE}^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$. En effet, le triangle AGH donne

$$\overline{GH}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos GAH$$
$$= b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

Mais $2bc\cos A = b^2+c^2-a^2$. Donc

$$\overline{GH}^2 = 2(b^2+c^2)-a^2$$

De même

$$\overline{DK}^2 = 2(a^2+c^2)-b^2$$

$$\overline{EF}^2 = 2(a^2+b^2)-c^2$$

ajoutant

$$\overline{GH}^2+\overline{DK}^2+\overline{EF}^2 = 3(a^2+b^2+c^2)$$

cqfd.

16°. Supposons maintenant que, le côté BC restant fixe, le sommet A se meuve sur le cercle circonscrit au triangle, c.à.d. de façon que l'angle A reste constant, et cherchons les lieux de différents points.

D'abord, quel est le lieu du milieu de FK ?

Je prends BC pour axe des x, et une perp. sur son milieu pour axe des y.

Les coordonnées de F seront $\begin{cases} \frac{a}{2}+b\sin C \\ b\cos C \end{cases}$

" K .. $\begin{cases} -\frac{a}{2}-c\sin B \\ c\cos B \end{cases}$

Donc celles du point milieu de FK seront

$$x = \frac{b}{2}\sin C - \frac{c}{2}\sin B = 0$$

$$y = \frac{b}{2}\cos C + \frac{c}{2}\cos B = \frac{a}{2}$$

Donc Théorème : Le milieu de FK est un point fixe quelle que soit la position de A dans le demi-plan au-dessus de BC : et il se trouve sur la perp. élevée au milieu de BC, à une distance moitié de BC.

au reste, la démonstration géométrique est aisée. Car dans le trapèze FKVI, on a KV = BL, FI = CL ; de plus VB = CI = AL. Donc le milieu de VI est le milieu de BC ; de plus, la ligne qui joint les milieux des côtés non-parallèles est perp. sur le

milieu de BC, et égale à la demi-somme des bases, c. à d. à $\frac{BC}{2}$ c.q.f.d.

11°. Cherchons le lieu du point F.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + b\sin C \\ y &= b\cos C \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

il faut éliminer b et C. or on a

$$b = \frac{a\sin(A+C)}{\sin A} = 2R\sin(A+C)$$

d'où

$$\frac{b}{2R} = \sin A\cos C + \cos A\sin C$$

$$\frac{b^2}{2R} = b\cos C.\sin A + b\sin C\cos A \qquad (2)$$

d'ailleurs les Eq. (1) donnent

$$\left.\begin{aligned} b\sin C &= x - \frac{a}{2} \\ b\cos C &= y \end{aligned}\right\} \quad b^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2$$

Substituant dans l'Eq. (2)

$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2R} = y\sin A + \left(x - \frac{a}{2}\right)\cos A$$

Equation d'un cercle. Les coordonnées du centre sont

$$y_1 = \frac{a}{2}$$

$$x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{a}{2} + r$$

r étant la distance du côté BC au centre du cercle circonscrit. — d'ailleurs le cercle passe en B. Il est donc déterminé.

Le point K décrit une circonférence égale.

12°. Cherchons le lieu du point G.

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{a}{2} + b\sin C - b\cos C \\ y &= b\cos C + b\sin C \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

d'où
$$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2 = 2b^2$$
$$\left(x-\frac{a}{2}\right)+y = 2b\sin C$$
$$y-\left(x-\frac{a}{2}\right) = 2b\cos C$$
Substituant dans l'Eq. (2) de tout-à-l'heure
$$\frac{2b^2}{4R} = b\cos C.\sin A + b\sin C.\cos A$$
il vient
$$\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2}{4R} = \frac{y-\left(x-\frac{a}{2}\right)}{2}\sin A + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)+y}{2}\cos A$$
Eq. d'un Cercle.

Les coordonnées du centre sont
$$y_1 = r+\frac{a}{2}$$
$$x_1 = r-\frac{a}{2}$$
r ayant la même signification que précédemment.

13°. Supposons enfin qu'on prolonge FG et KH jusqu'à leur rencontre, et cherchons le lieu de ce point de rencontre.

On aura facilement d'après ce qui précède

Eq. de FG. $\dfrac{y-b\cos C}{x-\frac{a}{2}-b\sin C} = -\dfrac{\sin C}{\cos C}$

Eq de KH $\dfrac{y-c\cos B}{x+\frac{a}{2}+c\sin B} = \dfrac{\sin B}{\cos B}$

et il faut éliminer b, c, B, C.

Or, chassant les dénominateurs et réduisant, la 1ère donne
$$b = y\cos C + \left(x-\frac{a}{2}\right)\sin C$$
la 2e.
$$c = y\cos B - \left(x+\frac{a}{2}\right)\sin B$$
remplaçant b par $\dfrac{a\sin B}{\sin A}$, c par $\dfrac{a\sin(A+B)}{\sin A}$ et C par $180-(A+B)$, il vient

$$\frac{a \sin B}{\sin A} = -y \cos(A+B) + \left(x - \frac{a}{2}\right)\sin(A+B)$$

$$\frac{a \sin(A+B)}{\sin A} = y \cos B - \left(x + \frac{a}{2}\right)\sin B$$

Développant les sinus et cosinus de A+B, divisant par cos B, on aura deux valeurs de tg B fournies par ces deux équations. En les égalant, puis chassant les dénominateurs et réduisant, on obtient

$$\left(x^2 - \frac{a^2}{4}\right)\sin A - 2ay + y^2 \sin^2 A + a^2 = 0$$

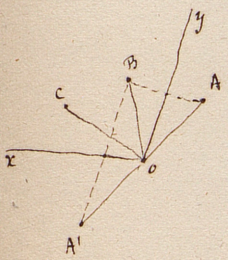
Éq. d'une Ellipse.

Si $A = 90°$, on a un cercle, dont l'éq. est

$$x^2 + (y-a)^2 = \frac{a^2}{4}$$

facile à construire. (Vall.)

1525. Déterminer une courbe du second degré, connaissant le centre et trois points.



Supposons que la courbe soit une Ellipse pour fixer les idées. Soit O le centre, et A, B, C les trois points donnés. — A' est un point de la courbe, et BA, BA' sont deux directions conjuguées. Menons donc Ox et Oy parallèles à ces droites, et prenons par rapport à ces axes les coordonnées de B et de C. Nous aurons

$$a^2 x_1^2 + b^2 y_1^2 = a^2 b^2$$
$$a^2 x_2^2 + b^2 y_2^2 = a^2 b^2$$

Équations qui donneront les longueurs a et b des demi-diamètres conjugués dirigés suivant Ox et Oy. — Retranchant les équations, on a

$$a^2 (x_1^2 - x_2^2) + b^2 (y_1^2 - y_2^2) = 0$$

D'où $$b^2 = \frac{a^2(x_1^2 - x_2^2)}{y_2^2 - y_1^2}$$

Reportant dans la 1ère.

$$a^2 x_1^2 + \frac{a^2 y_1^2 (x_1^2 - x_2^2)}{y_2^2 - y_1^2} = \frac{a^4 (x_1^2 - x_2^2)}{y_2^2 - y_1^2}$$

ou

$$x_1^2 (y_2^2 - y_1^2) + y_1^2 (x_1^2 - x_2^2) = a^2 (x_1^2 - x_2^2)$$

$$a^2 = \frac{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}{x_1^2 - x_2^2}$$

et par suite

$$b^2 = \frac{x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2}{y_2^2 - y_1^2}$$

ayant a et b, on en déduira la longueur et la direction des demi-axes par le théorème de Chasles.

1526.

1°. Trouver les coordonnées du point M d'intersection de deux droites infiniment voisines, sachant que $AA' = BB'$.

Éq. de AB $\quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

" A'B' $\quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} = 1$

d'où l'on tire $$x = \frac{aa'(b' - b)}{ab' - ba'}$$

Posons $$a' = a - \alpha$$ $$b' = b + \beta$$

ici $\beta = \alpha$. — on aura

$$x = \frac{aa'\beta . \alpha}{a(b+\alpha) - b(a-\alpha)} = \frac{aa'\alpha}{(a+b)\alpha} = \frac{aa'}{a+b}$$

si $a = a'$, il reste $$x = \frac{a^2}{a+b}$$

de même $$y = \frac{b^2}{a+b}$$

On peut chercher le lieu des points M. Il suffit

d'éliminer a et b, entre lesquels on a la relation $a+b=s$.
on aura

$$x = \frac{a^2}{s} \qquad y = \frac{b^2}{s}$$

d'où

$$a = \sqrt{sx}$$
$$b = \sqrt{sy}$$

$$a+b = s = \sqrt{sx} + \sqrt{sy}$$

et enfin

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{s}$$

Parabole tangente aux axes coordonnés, et ayant pour axe leur bissectrice, pour directrice la bissectrice de l'angle supplémentaire.

Du reste, on arrive à la même équation en éliminant a entre l'Eq.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{s-a} = 1$$

ou

$$(s-a)x + ay = as - a^2$$

et sa dérivée par rapport à a

$$-x + y = s - 2a$$

2°. Même question, en supposant aire $AOB = m^2$, on

$$ab = m^2$$

on a alors

$$a'b' = ab$$

ou

$$ab = (a-\alpha)(b+\beta) = ab + a\beta - b\alpha - \alpha\beta$$

$$\beta = \frac{b\alpha}{a-\alpha} \qquad b+\beta = \frac{ab}{a-\alpha}$$

La valeur de x devient donc

$$x = aa' \frac{\frac{b\alpha}{a-\alpha}}{\frac{a^2b}{a-\alpha} - b(a-\alpha)} = aa' \frac{b\alpha}{a^2b - b(a-\alpha)^2} = \frac{aa'}{2a-\alpha}$$

si $\alpha = 0$ et $a' = a$

$$x = \frac{a}{2}$$

de même

$$y = \frac{b}{2}$$

Le lieu des points M se trouve aisément :

$$m^2 = ab = 4xy$$

Hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes.
on trouve le même résultat en éliminant a entre l'Eq.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{\frac{m^2}{a}} = 1$$

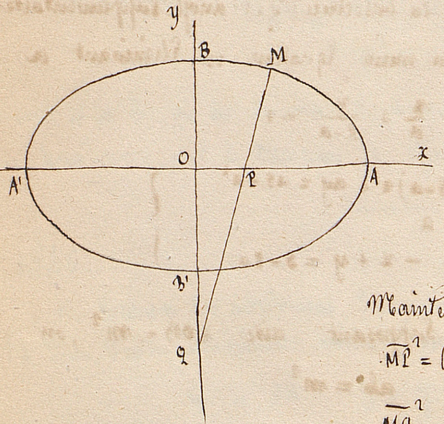
ou

$$m^2x + a^2y = am^2$$

et sa dérivée par rapport à a

$$2ay = m^2$$

1527. On mène une normale quelconque MPQ à l'ellipse. On a $\frac{MP}{MQ} = \text{Const}^t.$



L'Eq. de la normale est

$$y - y' = \frac{a^2y}{b^2x}(x - x')$$

elle donne

$$OP = \frac{(a^2-b^2)x}{a^2}$$

$$OQ = -\frac{(a^2-b^2)y}{b^2}$$

Maintenant

$$\overline{MP}^2 = (x - OP)^2 + y^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{a^4}$$

$$\overline{MQ}^2 = (y - OQ)^2 + x^2 = \frac{a^4y^2 + b^4x^2}{b^4}$$

d'où

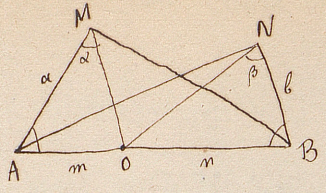
$$\frac{MP}{MQ} = \frac{b^2}{a^2} \qquad \text{cqfd.}$$

Rem. Ceci donne un moyen simple de trouver le rayon de courbure en A et en B. — En effet, si M vient en A, MP est le rayon ρ cherché et $MQ = a$. Donc

$$\frac{\rho}{a} = \frac{b^2}{a^2} \quad \therefore \quad \rho = \frac{b^2}{a}$$

on trouve de même pour le point B, $\rho' = \frac{a^2}{b}$, expressions connues.

1528. Les deux triangles rectangles AMB et ANB étant fixes, et O quelconque sur leur hypoténuse commune, on a



$$\operatorname{Tg}\alpha \cdot \operatorname{Tg}\beta = \text{Const}.$$

En effet, on a, dans le triangle AMO

$$\frac{\sin(A+\alpha)}{\sin\alpha} = \frac{a}{m}$$

Développant,

$$\sin A \cot\alpha + \cos A = \frac{a}{m}$$

d'où

$$\operatorname{Tg}\alpha = \frac{m \sin A}{a - m\cos A}$$

Le triangle ONB donne de même

$$\operatorname{Tg}\beta = \frac{n \sin B}{b - n\cos B}$$

d'où

$$\operatorname{Tg}\alpha \operatorname{Tg}\beta = \frac{mn \sin A \sin B}{ab - bm\cos A - an\cos B + mn\cos A\cos B}$$

or on a $ab = bm\cos A + an\cos B$. car $a = (m+n)\cos A$, $b = (m+n)\cos B$

donc $ab = (m+n)^2\cos A\cos B$, et $bm\cos A + an\cos B = m(m+n)\cos A\cos B + n(m+n)\cos A\cos B$

Il reste donc

$$\operatorname{Tg}\alpha \operatorname{Tg}\beta = \operatorname{Tg}A \operatorname{Tg}B \qquad \text{c.q.f.d.}$$

1549.

Problème. (assez remarquable)

Trouver le lieu des projections du foyer d'une Parabole sur ses Normales.

L'Eq. de la Normale au point $x'y'$ est

$$x - x' + \frac{p}{y'}(y - y') = 0$$

remplaçant x' par $\frac{y'^2}{2p}$. $x - \frac{y'^2}{2p} + \frac{p}{y'}(y - y') = 0$

Chassant le dénominateur

$$2py'x - y'^3 + 2p^2y' - 2p^2y' = 0 \quad (1)$$

L'Eq. de la perp. abaissée du foyer F sur cette normale sera

$$y = \frac{p}{y'}\left(x - \frac{p}{2}\right)$$

ou

$$2yy' = p(2x - p) \quad (2)$$

et il reste à éliminer y' entre les Equations (1) et (2).

La seconde donne

$$y' = \frac{p(2x-p)}{2y}$$

Reportant, il vient, après avoir divisé par p^2 et chassé les dénominateurs,

$$8xy^2(2x-p) - p(2x-p)^3 + 16y^4 - 8py^2(2x-p) = 0$$

C'est l'Equation du lieu. Elle est du 4e. degré, mais elle peut se simplifier. — Je l'écris ainsi

$$16y^4 + 8y^2(2x-p)(x-p) - p(2x-p)^3 = 0$$

Je complète le carré formé par les deux premiers termes :

$$16y^4 + 8y^2(2x-p)(x-p) + (2x-p)^2(x-p)^2 - (2x-p)^2(x-p)^2 - p(2x-p)^3 = 0$$

ou

$$\left\{4y^2 + (2x-p)(x-p)\right\}^2 - \left\{2x-p\right\}^2\left\{(x-p)^2 + p(2x-p)\right\} = 0$$

ou

$$\left\{4y^2 + (2x-p)(x-p)\right\}^2 - x^2(2x-p)^2 = 0$$

Equation qui se décompose en deux autres

$$4y^2 + (2x-p)(x-p) + x(2x-p) = 0$$

$$4y^2 + (2x-p)(x-p) - x(2x-p) = 0$$

ou bien

$$4y^2 + (2x-p)^2 = 0$$

$$4y^2 - p(2x-p) = 0$$

La 1ère représente le point

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{p}{2} \end{cases}$$

c.à.d. le foyer.

La seconde représente une Parabole

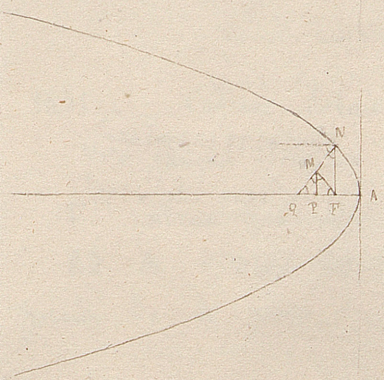
$$y^2 = \frac{p}{2}x - \frac{p^2}{4}$$

dont F est le sommet et le paramètre $\frac{p}{2}$. Car, si l'on change x en $x+\frac{p}{2}$, ce qui revient à transporter l'origine en F, l'Éq. devient

$$y^2 = \frac{p}{2}x$$

Remarques diverses.

I. Si l'on avait su d'avance que le Lieu fût du second degré, on aurait pu le déterminer aisément. — En effet 1°. il s'étend à l'infini; 2°. il est tout entier renfermé dans la Parabole donnée; donc c'est une autre parabole. — Ensuite, il passe évidemment en F, qui en est donc le sommet, par raison de symétrie.



Reste à trouver le paramètre or cela est facile: En effet, si l'on prend le point N de la parabole donnée dont AF est l'abscisse, il est clair que, pour le point M de la courbe, si l'on fait attention aux angles égaux, on a $MP = FP$, c.à.d. $= \frac{FQ}{2} = \frac{p}{2}$ c.à.d. $x = y = \frac{p}{2}$ en prenant F pour origine. Si donc l'Éq. est $y^2 = 2Px$, on devra avoir $\frac{p^2}{4} = 2P\frac{p}{2}$ d'où $P = \frac{p}{4}$ et l'Équation $y^2 = \frac{p}{2}x$.

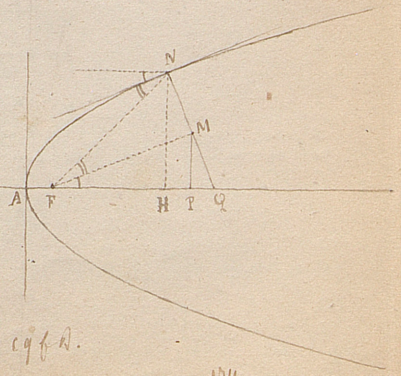
II. On aurait pu résoudre le problème par des considérations géométriques.

En effet, la figure montre clairement que le triangle NFQ est isocèle. Donc $MN = MQ$ et par suite $PQ = \frac{1}{2}HQ = \frac{1}{2}p$. Or le triangle rectangle FMQ donne

$$\overline{MP}^2 = PQ.FP$$

ou $$y^2 = \frac{p}{2}x$$

en prenant F pour origine

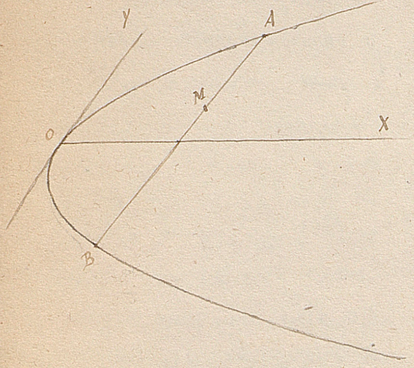


c.q.f.d.

vu.

1550. — Lieu des points de division en moyenne et extrême raison des cordes parallèles d'une Parabole.

Soit $y^2 = 2px$ l'Éq. de la Parabole rapportée à la tangente parallèle aux cordes à considérer. —



Soient $x'y'$ les coordonnées de A, et x, y celles de M. on a $x' = x$.

On a

$$\overline{MB}^2 = MA . AB$$

ou

$$(y + y')^2 = (y' - y)\, 2y' \qquad (1)$$

avec

$$y'^2 = 2px \qquad (2)$$

et il faut éliminer y'.

L'Éq. (1) donne

[illegible]

$$y^2 + y'^2 + 2yy' = 2y'^2 - 2yy'$$

ou

$$4yy' = y'^2 - y^2 \qquad (3)$$

J'élève au carré

$$16y^2y'^2 = (y'^2 - y^2)^2$$

ou

$$32pxy^2 = (2px - y^2)^2 = y^4 \pm 4pxy^2 + 4p^2x^2$$

$$y^4 - 36pxy^2 + 4p^2x^2 = 0$$

Éq. du 4e. degré. — Mais on peut la décomposer en deux. — Écrivons

$$4p^2x^2 - 36pxy^2 = -y^4$$

$$4p^2x^2 - 36pxy^2 + 81y^4 = 80y^4$$

$$(9y^2 - 2px)^2 - 80y^4 = 0$$

Donc on a les deux Équations

$$\left.\begin{aligned} 9y^2 - 2px + 4y^2\sqrt{5} &= 0 \\ 9y^2 - 2px - 4y^2\sqrt{5} &= 0 \end{aligned}\right\}$$

ou

$$\left.\begin{aligned} (9 + 4\sqrt{5})\, y^2 &= 2px \\ (9 - 4\sqrt{5})\, y^2 &= 2px \end{aligned}\right\}$$

Ce sont deux paraboles tangentes à la première en O. — La première, qui donne $y < y'$, convient seule. — La seconde s'interprète aisément.

Remarque. — Le Résultat est analogue pour l'Ellipse.

En Général, si l'Equation d'une Courbe est

$$y^2 = \varphi(x)$$

Il est facile de s'assurer que l'Eq. (3) subsiste encore, et que l'Equation du lieu est

$$(9 \pm 4\sqrt{5})\, y^2 = \varphi(x) \qquad \text{(III)}.$$

1551. — Cadrans Solaires.

Voici quelques Résultats faciles à trouver.

1°. Cadran horizontal.

Soit h l'angle que fait avec la méridienne la ligne horaire de h, heures. On a

$$\operatorname{tg} h = \sin \lambda \operatorname{tg} (h, 15^\circ)$$

Voici les nombres pour la Latitude de Metz, $\lambda = 49^\circ\ 7'\ 14''$

1^h ...	11°	27'	10"
2^h ..	23°	34'	57",4
3^h ...	37°	5'	33"
4^h	52°	38'	4",5
5^h	70°	29'	10",5

2°. Cadran vertical déclinant.

Soit δ l'angle de la trace horizontale du mur avec la méridienne, $\delta < 90°$.

H l'angle de la ligne de Midi (verticale) avec la ligne

horaire de H_1 heures. — on a

$$\operatorname{Tg} H = \frac{\operatorname{Cot}\lambda \operatorname{Sin} h}{\operatorname{Sin}(\delta \pm h)}$$

en posant

$$\operatorname{Tg} h = \operatorname{Sin}\lambda \operatorname{Tg}(H_1 15^\circ)$$

et supposant que H_1 désigne le nombre d'heures qui s'écoule entre Midi et l'heure considérée ; par ex. $H_1 = 3$ pour 9^h du matin comme pour 3^h du soir.

1552. On demande si $\sqrt[n+n'+n'']{a a' a''}$ est une moyenne entre $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n']{a'}$ et $\sqrt[n'']{a''}$.

oui, car les Logarithmes sont

$$\frac{La + La' + La''}{n + n' + n''} \qquad \frac{La}{n} \quad \frac{La'}{n'} \quad \frac{La''}{n''}$$

Le 1er est compris entre le > et le < des autres. Donc il en est de même pour les nombres.

1553. Transformer la formule connue

$$x = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}\right)}$$

on trouve

$$x = \sqrt{R^2 + \frac{aR}{2}} - \sqrt{R^2 - \frac{aR}{2}}$$

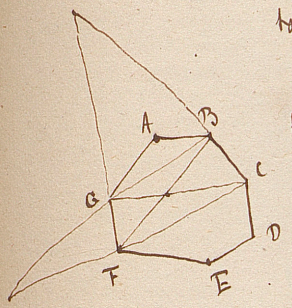
1554. La somme des côtés d'un rectangle est a^t. Si l'on augmente un côté de b, l'autre de c, la surface augmente de m^2. quels sont les côtés ? — Conditions de possibilité. Les retrouver par la Géométrie. (facile).

1554. Problèmes sur les Combinaisons.

I. Combien un Polygone de m côtés a-t-il de Diagonales ?

Évidemment $\frac{m(m-3)}{2}$.

II. Combien ces Diagonales ont-elles de points d'intersection, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du Polygone, supposé convexe ?



Évidemment, il y en a 2 fois plus à l'extérieur qu'à l'intérieur,

et à l'intérieur, il y en a $\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}$.

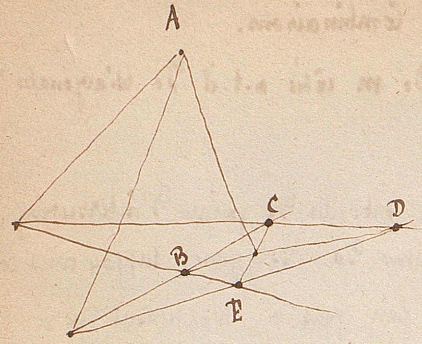
III. On donne m points de l'espace, dont 4 qcq. ne sont pas dans un même plan. Par ces points pris 3 à 3 on fait passer des plans. Combien ces plans ont-ils de droites d'intersection ?

Ces droites d'intersection peuvent se partager en trois groupes.

1°. Celles qui passent par deux des points donnés. Il est clair qu'il y en a

$$\frac{m(m-1)}{2}$$

2°. Celles qui passent par un seul des points donnés. Pour en avoir le nombre, je prends un de ces points, A, et 4 des autres, B, C, D, E : je suppose ces derniers dans un même plan pour faciliter la figure et le raisonnement : mais cela ne changera pas le ~~raisonne-ment~~ résultat. Il est clair que cela me donnera



Trois droites d'intersection passant par le point A. Donc, pour avoir le nombre de ces droites, il faudra prendre 3 f. le produit de m par le nombre de combinaisons de $m-1$ points 4 à 4, c.à.d.

$$3m\,\frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}.$$

3°. Celles qui ne passent par aucun des points donnés. Or, si je prends un plan passant par 3 des points, il sera rencontré par chacun de ceux qui passent par 3 des autres points suivant une de ces droites, et qui sont au nombre de

$$\frac{(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3}$$

Si je multiplie par

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}$$

et si je prends la moitié, puisque chaque droite sera ainsi obtenue évidemment 2 fois, j'aurai pour le nombre des droites du 3e. groupe :

$$\frac{1}{2}\,\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1.2.3\;.\;1.2.3}.$$

Donc le nombre total cherché est

$$N = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{3m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{2.\,1.2.3.\,1.2.3}$$

ou, en réduisant,

$$N = \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m+4)}{72}$$

Rem. Cette formule ne s'applique pas pour $m=3$.

Pour $m=4$, elle donne $N=6$.

Pour $m=5$, elle donne $N=25$. Il est aisé de vérifier.

Pour $m=6$, elle donne $N=115$.

1555. Déterminer y par l'équation

$$y^2 + y^2 y'^2 = a^2$$

(y' est la dérivée de y).

On tire de là

$$y' = \frac{\sqrt{a^2-y^2}}{y}$$

$$\frac{1}{y'} = \frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}$$

Posons $y = f(x)$. On a $x = \varphi(y)$, et $\frac{1}{y'} = x'$. Remontant aux fonctions primitives, on a donc

$$x + C = -\sqrt{a^2-y^2}$$

$$(x+C)^2 = a^2 - y^2$$

$$y = \sqrt{a^2-(x+C)^2}$$

1556. Une équation du 3e. degré dont les coefficients sont commensurables, et qui n'a pas de racines commensurables, n'en a pas non plus de la forme $a \pm \sqrt{b}$.

Car, si elle en avait une, elle aurait aussi $a - \sqrt{b}$,

et, en divisant le 1er. membre par $(x-a-\sqrt{b})(x-a+\sqrt{b})$ ou $(x-a)^2-b$, on aurait un quotient du 1er. degré rationnel, ce qui est contre l'hypothèse.

Une équation du 4e. degré, à coefficients commensurables, qui admet une racine de la forme $a+\sqrt{b}$, en admet quatre.

1557. Quel doit être le rayon d'un arc de cercle de longueur a pour que le segment compris entre cet arc et sa corde soit maximum ?

Soit x le rayon. L'équation est

$$\frac{1}{2}ax - \frac{1}{2}x^2 \sin\frac{a}{x} = \max.$$

Égalons à zéro la dérivée.

$$a - 2x\sin\frac{a}{x} + a\cos\frac{a}{x} = 0$$

$$a\left(1+\cos\frac{a}{x}\right) = 2x\sin\frac{a}{x}$$

Cette équation sera vérifiée pour $\sin\frac{a}{x}=0$ et $\cos\frac{a}{x}=-1$ d'où

$$\frac{a}{x} = \pi$$

et plus généralement

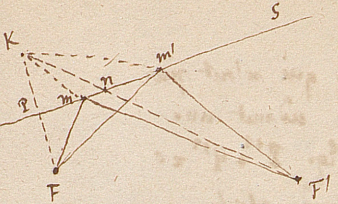
$$\frac{a}{x} = (2k+1)\pi$$

$$x = \frac{a}{(2k+1)\pi}$$

Il faut discuter.

1558. Propriété de la Tangente à l'Ellipse et à la Parabole.

1°. Ellipse.



Soient m, m' deux points infiniᵗ. voisins, mm'S la Sécante.

Je dis qu'à la limite

angle $FmP = F'mS$

Or l'angle $F'mS$ est la limite de $Fm'S$; c'est aussi la limite de l'angle FnS , si l'on prouve que n reste compris entre m et m'.

K est le symé-trique de F par rapport à mm'.

Donc on a à prouver que

Lim. FmP = Lim. $F'nS$

ou, en prenant des ~~opposés au sommet~~ angles égaux

Lim KmP = Lim KnP

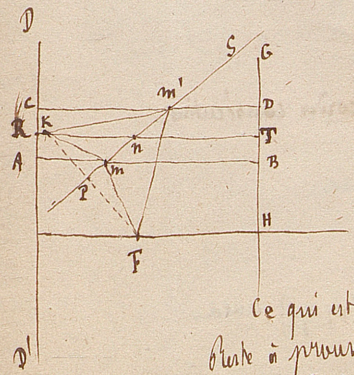
Ce qui est évident, puisque n arrive à coïncider avec m.

Reste à démontrer que n est toujours entre m et m'.

Or $Km'F' = KmF'$: et si m par ex. était entre n et m', la ligne enveloppée serait égale à la ligne enveloppante.

2°. Parabole.

Soit K le sym. de F par rapport à mm', et HG une perp. qcq. à l'axe.



Je dis que Lim FmP = Lim $Bm S$

= Lim $Dm'S$

= Lim TnS

ou, en prenant les angles égaux

Lim KmP = Lim KnP

Ce qui est évident.

Reste à prouver que n est compris entre m et m'.

or on a évidemment $KmB = Km'D$: donc m par ex. ne peut être entre n et m' sans que la ligne enveloppée soit = la ligne enve-loppante : car ... etc.

(Serret. Exam. de l'Éc. Polyt.)

1559. Si dans l'Eq. $f(x)=0$, on pose $y=\frac{x-a}{b-x}$ $(a<b)$ le nombre des variations de la transformée sera une limite des racines de la proposée comprises entre a et b. (facile).

1560. Soient P et Q deux polynômes en x qui n'ont pas de facteur commun. Si l'Equation $P^2+Q^2=0$ admet une racine double, cette racine convient aussi à l'Eq. $P'^2+Q'^2=0$, P' et Q' étant les dérivées de P et Q. (Bertrand, algèbre).

En effet, on aura pour cette racine

$$PP'+QQ'=0$$

d'où

$$\frac{P'}{Q'}=-\frac{Q}{P}$$

$$\frac{P'^2}{Q'^2}=\frac{Q^2}{P^2}$$

Mais puisque $P^2+Q^2=0$, on a $\frac{Q^2}{P^2}=-1$ Donc

$$\frac{P'^2}{Q'^2}=-1$$

$$P'^2+Q'^2=0 \qquad \text{cqfd.}$$

1561. Inscrire dans un arc de Parabole trois cordes consécutives formant trois segments équivalents.

L'Eq. de la Parabole étant

$$y^2=2px,$$

un segment correspondant aux points $(x_1\,y_1)$, $(x_2\,y_2)$ aura pour expression

$$\frac{2}{3}x_2y_2-\frac{(x_2-x_1)(y_2+y_1)}{2}-\frac{2}{3}x_1y_1$$

ou

$$\frac{1}{6}\left(x_2 y_2 - x_1 y_1\right) + \frac{1}{2}\left(x_1 y_2 - y_1 x_2\right)$$

ou, à cause de l'Eq. de la Parabole,

$$\frac{1}{4p}\left\{\frac{y_2^3 - y_1^3}{3} + y_1^2 y_2 - y_2 y_1^2\right\}$$

$$\text{ou } \frac{y_2 - y_1}{4p}\left\{\frac{y_2^2 + y_1 y_2 + y_1^2}{3} - y_1 y_2\right\} \quad \text{ou } \frac{(y_2 - y_1)^3}{12p}$$

Donc, si l'on veut inscrire dans un arc de Parabole n cordes successives donnant lieu à n segments égaux, il suffira de diviser la partie $y_{n+1} - y$ de l'axe des y qui représente la projection de l'arc, en n parties égales, et de mener des parallèles à l'axe par les points de division. La jonction successive des points où ces parallèles coupent la Parabole donnera lieu aux segments demandés.

Pour l'Hyperbole et l'Ellipse, c'est un peu moins simple. (Terquem, tome XV, p. 26.)

1562. Exercices de Calcul.

Démontrer les identités suivantes :

$$a+b = \frac{a^2}{a-b} + \frac{b^2}{b-a}$$

$$a+b+c = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$a+b+c+d = \frac{a^4}{(a-b)(a-c)(a-d)} + \frac{b^4}{(b-a)(b-c)(b-d)} + \frac{c^4}{(c-a)(c-b)(c-d)} + \frac{d^4}{(d-a)(d-b)(d-c)}$$

etc.

$$ab+ac+bc = \frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)} + \frac{a^2c^2}{(a-b)(c-b)} + \frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}$$

1563. Sur l'aire du Triangle Sphérique. — Soit 2S cette aire. Les deux formules de Delambre

$$\frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad \frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

peuvent s'écrire

$$(1)\quad \frac{\sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \qquad (2)\quad \frac{\cos\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}$$

on déduit de l'Eq. (1)

$$\frac{\sin\frac{C}{2} - \sin\left(\frac{C}{2}-S\right)}{\sin\frac{C}{2} + \sin\left(\frac{C}{2}-S\right)} = \frac{\cos\frac{c}{2} - \cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{a+b}{2}}$$

transformant en produits :

$$\frac{\operatorname{Tg}\frac{S}{2}}{\operatorname{Tg}\frac{C-S}{2}} = \operatorname{Tg} p \operatorname{Tg}\frac{p-c}{2} \qquad (3)$$

on déduit de même de l'Eq. (2)

$$\operatorname{Tg}\frac{S}{2}\operatorname{Tg}\frac{C-S}{2} = \operatorname{Tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-b}{2} \qquad (4)$$

Multipliant (3) et (4), on a

$$(5)\qquad \operatorname{Tg}\frac{S}{2} = \sqrt{\operatorname{Tg}\frac{p}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-a}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-b}{2}\operatorname{Tg}\frac{p-c}{2}}$$

formule de Simon Lhuilier.

1564. Dans un Hexagone Gauche ayant les côtés opposés Égaux et Parallèles, les milieux des côtés sont dans un même plan.

1565. Dans un Polygone Gauche d'un nombre pair de côtés, ayant les côtés opposés

égaux et parallèles, les droites qui joignent les sommets opposés, et celles qui joignent les milieux des côtés opposés passent par un seul et même point.

(Très-facile par des considérations de parallélogrammes).

1566. Deux cercles étant dans un même plan, et les tangentes communes intérieures se coupant à angle droit, l'aire du triangle formé par ces tangentes et une tangente commune extérieure est égale au produit des rayons.

(Math. Élémentaires.)

1567. Résoudre

$$x \cdot 2^x = 30.$$

$x = 3,22$. car $f(3,22) = 0,0001$.

1568. Rendre rationnel le dénominateur de

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} - \sqrt[3]{a+b}}$$

on emploie pour cela la formule
$3(x+y-z)(x^2+y^2+z^2-xy+xz+yz) = x^3+y^3-z^3+3xyz$

1569. De combien de manières peut-on former le nombre 251 par l'addition de 12 nombres entiers, inférieurs à 30?

1570. Trouver la somme des produits 3 à 3 des n premiers nombres naturels.

1571. Peut-on, par les dérivées, tirer $\cos(a+b) = \ldots$ de $\sin(a+b) = \ldots$

(Hermite, Éc. Polyt. 1855).

1572. Un triangle rectangle est équivalent au rectangle des deux segments faits sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.

facile, joli.

1573. Sommation de certaines séries (Catalan).

Soit $F(n)$ une fonction entière de n égale au produit de quelques-uns des p facteurs n, $n+1$, $n+2$, $n+3$, … $(n+p-1)$. Soit $f(n)$ une autre fonction entière de n, première par rapport à $F(n)$, et dont le degré soit de deux unités au moins inférieur au degré de $F(n)$ (sans cela, pas de convergence). Une remarque fort simple permet de sommer très-aisément la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{f(n)}{F(n)}$$

Pour le faire voir, prenons un cas particulier, et, par ex.

$$u_n = \frac{n^2 - 3n + 7}{n(n+1)(n+3)(n+4)}$$

au lieu de décomposer, par la méthode connue, u_n en fractions ayant pour dénominateurs les facteurs n, $n+1$, $n+3$, $n+4$, posons

$$\frac{n^2 - 3n + 7}{n(n+1)(n+3)(n+4)} = \frac{A}{n(n+1)} + \frac{B}{(n+1)(n+2)} + \frac{C}{(n+2)(n+3)} + \frac{D}{(n+3)(n+4)}$$

A, B, C, D étant des constantes.

Pour les déterminer, chassons les dénominateurs, et faisons successivement $n = 0$, $n = -1$, $n = -2$, $n = -3$; nous trouverons

$$14 = 24A \quad 11 = 6A - 6B \quad 0 = -4B + 4C \quad -25 = 6C - 6D \qquad (1)$$

puis

(2) $\quad A = \frac{7}{12} \qquad B = -\frac{5}{4} \qquad C = -\frac{5}{4} \qquad D = \frac{35}{12}$

[on voit bien, sans insister, que, dans tous les cas, la décomposition sera possible, et d'une seule manière].

Soit actuellement

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

c. a d.

$$S_n = A\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B\sum_1^n \frac{1}{(n+1)(n+2)} + C\sum_1^n \frac{1}{(n+2)(n+3)} + D\sum_1^n \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

ou bien

$$S_n = A\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} + B\sum_2^{n+1} \frac{1}{n(n+1)} + C\sum_3^{n+2} \frac{1}{n(n+1)} + D\sum_4^{n+3} \frac{1}{n(n+1)}$$

Mais (et c'est là cette remarque simple dont nous parlions)

$$\sum_1^n \frac{1}{n(n+1)} = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc

$$S_n = A\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + B\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right) + C\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right) + D\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+4}\right)$$

ou

$$S_n = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D - \left(\frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} + \frac{C}{n+3} + \frac{D}{n+4}\right)$$

Par suite

$$\text{Lim. } S_n = A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{4}D$$

Ici, on a $\quad \text{Lim } S_n = \frac{13}{24}.$

ECOLE NORMALE SUPERIEURE

1574. Si les Racines de l'Eq. du 3e. degré sont $p^2, q^2, 2pq$, les racines de la dérivée sont rationnelles.

En effet, l'Eq. sera

$$x^3-(p+q)^2x^2+(p^2q^2+2p^3q+2pq^3)x+K=0$$

La dérivée

$$3x^2-2(p+q)^2x+(p^2q^2+2p^3q+2pq^3)=0$$

et la quantité sous le Radical est le carré de

$$p^2-pq+q^2.$$

1575. Résoudre

$$x+y=a$$

$$(x^2+y^2)(x^3+y^3)=b^5$$

1576. Exercices de Descriptive (Droite et Plan).

1°. Trouver les traces d'un plan qui passe par un point donné, qui fasse avec la ligne de terre un angle donné, et qui soit tel que les traces fassent entre elles un angle donné.

2°. Etant données trois droites qui se rencontrent dans l'espace, trouver sur l'une d'elles un point qui soit à égale distance des deux autres.

3°. Etant donnés 4 points A, B, C, D, mener par A un plan tel que, en abaissant sur ce plan des perpendiculaires par les points B, C, D, leurs pieds soient les sommets d'un triangle Equilatéral, ou d'un triangle semblable à un triangle donné.

4°. Par un point donné mener un plan qui rencontre un plan donné suivant une droite d'une

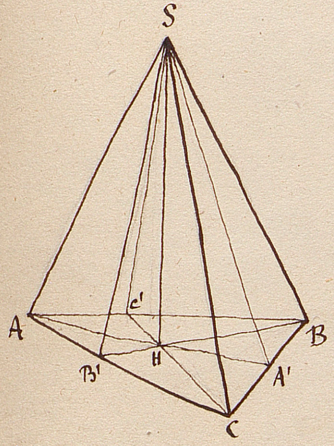
longueur donnée (entre les deux traces) et tel que l'angle qu'il fait avec ce plan soit égal à un angle donné ; ou bien, tel que ses traces fassent entre elles un angle donné.

1577. Propriétés du tétraèdre, dont les arêtes opposées sont rectangulaires.

Théorème I. — Il est possible de construire une infinité de tétraèdres où deux arêtes sont respectivement perpendiculaires sur leurs opposées.

C'est évident.

Théorème II. — Dans un pareil tétraèdre, les deux autres arêtes sont aussi perpendiculaires l'une sur l'autre.



Supposons en effet SA perp. sur BC, SB perp. sur AC. — Menons AA' perp. sur BC, et joignons SA'. BC étant perp. sur SA et AA', est perp. au plan de ces deux droites, donc à SA'. Ainsi le plan SAA' est perp. sur le plan ABC et sur BC. De même, ~~le~~ on peut mener un plan SBB' perp. sur le plan ABC et sur AC. Donc l'intersection SH de ces deux plans, qui joint S au point de concours H des hauteurs de la base ABC, est une perp. sur ABC, et par suite, est la hauteur du tétraèdre. — Donc aussi le plan ~~SA~~ SCHC' est perp. sur le plan ABC, par suite, comme CC' est perp. sur AB, ce plan est perp. sur AB, et l'arête SC qui est dedans, l'est aussi. c.q.f.d.

Théorème III. — Les 4 hauteurs d'un pareil tétraèdre se coupent en un même point (même fig.)

En effet si l'on abaisse par exemple une perpendiculaire du point A sur SA', on aura une hauteur du tétraèdre, puisque le plan SAA' est perp. sur CB, par suite sur la face SCB. Cette droite rencontrera SH au point de rencontre des 3 hauteurs du triangle SAA'. — De même les hauteurs abaissées de B et de C rencontreront SH. Mais on démontrera de même que les deux hauteurs abaissées de A et de B par ex. doivent se rencontrer, ce qui ne peut arriver que si elles coupent SH en un seul et même point. Donc ... cqfd.

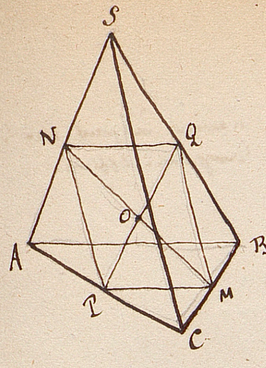
Théorème IV. Dans un pareil tétraèdre, les trois plus courtes distances entre les arêtes opposées se coupent au point de rencontre des 4 hauteurs (même fig.)

Il résulte en effet de ce qui précède que si du point A' par ex. on abaisse une perp. sur SA, ce sera la plus courte distance entre CB et SA. or cette droite passera au point de rencontre des hauteurs du triangle SAA', c.à.d. au point de rencontre des 4 hauteurs du tétraèdre, cqfd.

Théorème V. — Dans un pareil tétraèdre, les six dièdres, et les ~~deux~~ angles que chaque arête fait avec les deux faces opposées, sont dix-huit angles dont la somme vaut douze angles droits. (Même figure).

En effet, les angles des 3 triangles SAA', SBB', SCC' sont déjà 9 de ces angles. On aurait évidemt. trois autres triangles analogues contenant les 9 autres. Donc la somme est bien 2.6 ou 12 angles droits.

Théorème VI. Dans un pareil tétraèdre, les lignes qui joignent les milieux des arêtes opposées sont de même longueur.



En effet, deux quelconques de ces lignes, par exemple MN et PQ, sont les diagonales d'un parallélogramme MPNQ, dont deux côtés MP, NQ, sont parallèles à AB, et les deux autres à SC. Ce parallélogramme est donc un rectangle, et ses diagonales sont égales.

Corollaire. — La sphère qui passe par le milieu d'une des arêtes, et qui a son centre au point O, lequel est le centre de gravité du tétraèdre, passe donc par les milieux des cinq autres arêtes.

Il est d'ailleurs évident qu'il n'y a pas d'autre sphère passant par ces six milieux.

Remarquons enfin que cette sphère contenant par exemple les trois milieux des côtés du triangle ABC, contient le cercle des 9 points de ce triangle, et passe par conséquent par les pieds des hauteurs de ce triangle, lesquels sont les pieds des plus courtes distances entre les trois côtés de ce triangle et les arêtes opposées du tétraèdre. Donc :

Théorème VII. — Dans un pareil tétraèdre, les six milieux des arêtes, et les six pieds des plus courtes distances entre les arêtes opposées, sont 12 points appartenant à une même sphère, laquelle a son centre au centre de gravité du tétraèdre.

1578. Théorèmes et Problèmes tirés de la Géométrie d'Amyot.

Les numéros indiquent ceux du Programme Officiel.

Géométrie Plane.

4. – La somme des médianes d'un triangle est comprise entre le périmètre et la moitié du périmètre.

9. – Si l'on prolonge les côtés opposés d'un quadrilatère jusqu'à ce qu'ils se rencontrent, les bissectrices des deux angles qu'ils font se coupent sous un angle égal à la demi-somme de deux des angles opposés du quadrilatère. – Peuvent-elles se couper à angle droit ?

10. – Deux quadrilatères sont équivalents si leurs diagonales sont égales chacune à chacune et égalemt. inclinées (on démontre d'abord que le parallélogramme qu'on forme en menant, par les extrémités de chaque diagonale du quadrilatère, des parallèles à l'autre diagonale, est équivalent au double de ce quadrilatère).

– Les diagonales de deux parallélogrammes inscrits l'un dans l'autre, passent par un même point.

12. – Tracer une route circulaire passant à la même distance de 4 points.

– Tracer, avec un rayon donné, une circonférence qui intercepte sur deux droites des cordes de longueur donnée.

13. – Tracer une circonférence qui intercepte sur deux parallèles des cordes de longueur donnée.

× 15. – Si l'on trace quatre circonférences telles que chacune passe par deux sommets consécutifs d'un quadrilatère inscrit, ces courbes se coupent en quatre points, autres que les sommets. Démontrer que ces quatre points sont sur une même circonférence.

× – Lorsque les côtés d'un angle coupent deux circonférences, les cordes des arcs qu'ils interceptent sur l'une de ces courbes font un quadrilatère inscriptible avec les cordes des arcs interceptés sur l'autre.

18, 19. – Par un point donné dans un angle, tracer une ligne droite telle que le périmètre du triangle résultant soit donné.

× – Mener par deux points donnés deux droites parallèles qui forment un losange avec deux autres parallèles données.

– Une droite et deux points situés d'un même côté de cette ligne étant

données, trouver sur la droite le point d'où l'on voit la distance des deux points sous le plus grand angle possible. – Remplacer les deux points par un cercle, et résoudre le même problème.

– La distance de deux quelconques des quatre points dans lesquels un côté d'un triangle est touché par les 4 cercles inscrit et ex-inscrits est égale à l'un quelconque des deux autres côtés, ou à la somme de ces côtés, ou à leur différence.

× – Construire un triangle dans lequel on connaît deux des rayons des cercles qui touchent son périmètre, l'un de ses côtés, ou la somme de deux côtés, ou leur différence.

21, 22. – Inscrire un carré dans un demi-cercle, dans un triangle.

× – Si, pour construire le quadrilatère ABCD, on ne donne que les trois côtés AB, BC, CD, et la diagonale AC, le quadrilatère est indéterminé. 1°. quel est le lieu du quatrième sommet D? 2°. Quel est le lieu du milieu de la diagonale BD? 3°. quel est le lieu du milieu de la ligne droite qui joint les milieux des diagonales?

× – Construire sur deux lignes droites dont la position et la grandeur sont données, deux triangles semblables ayant un sommet homologue commun.

23, 24. Deux cercles dont les rayons sont 0m,5 et 1m,5 se coupent orthogonalement. On demande la distance de leurs centres. (Concours de 3e. 1855)

× – Tracer, par deux points donnés, une circonférence qui divise en deux parties égales une circonférence donnée.

– Les cercles décrits sur les diagonales d'un trapèze comme diamètres ont une corde commune qui passe par l'intersection des côtés non parallèles du trapèze.

29. – Si la distance des centres de deux cercles qui se coupent à angle droit est égale au double d'un des rayons, la corde commune est le côté de l'hexagone régulier inscrit dans l'un de ces cercles, et le côté du triangle équilatéral inscrit dans l'autre.

30, 31. – Trois points A, B, C, qui ne sont pas en ligne droite, étant donnés, tracer par le point C une ligne droite MN telle que le trapèze formé par cette ligne, par la droite AB et les perp. menées des points A, B sur ~~cette~~ MN, soit équivalent à un carré donné.

– Transformer un triangle rectangle en un triangle isocèle qui lui soit équivalent et qui ait avec lui un angle commun. – Combien de solutions?

– Transformer un polygone régulier en un autre polygone régulier qui lui soit équivalent et ait deux fois plus de côtés.

– Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une perp. à l'une des côtés.

– Inscrire dans un cercle un trapèze dont la hauteur et la surface sont données.

– Par un point donné sur le plan d'un angle, tracer une sécante telle que l'aire du triangle qu'elle fait avec les côtés de cet angle soit égale à un carré donné.

– Par un point donné sur le plan d'un angle, tracer une sécante telle que le produit des distances du sommet de l'angle aux deux points d'intersection soit égal à un carré donné.

– Diviser un triangle en deux parties équivalentes par une parallèle à une droite donnée.

34. On joint de deux en deux par des diagonales les sommets d'un hexagone régulier. On forme un polygone régulier. On demande le rapport de sa surface à celle de l'hexagone donné (conc. de 3e. 1855).

Géométrie dans l'Espace.

1, 2. Tracer par un point donné une ligne droite qui rencontre deux droites non situées dans le même plan.

– Toute droite, également inclinée sur trois autres qui passent par son pied dans un plan, est perp. au plan.

– Quel est le lieu géométrique des pieds des perp. abaissées d'un point extérieur à un plan sur les différentes lignes droites qu'on peut tracer dans ce plan par un point donné ?

– Trouver, sur un plan, le lieu géom. des points tels que la somme des carrés de leurs distances à deux points donnés hors du plan, soit constante.

3, 4. Mener une parallèle à une ligne droite de manière qu'elle rencontre deux autres droites non situées dans le même plan.

– Tout plan parallèle à deux côtés opposés d'un quadrilatère gauche, divise les deux autres côtés en segments proportionnels.

– Les médianes d'un quadrilatère gauche se rencontrent au milieu de la ligne qui joint les milieux des diagonales.

6. – Lieu des milieux d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites orthogonales non situées dans le même plan.

– Une droite est également inclinée sur deux plans qui se coupent lorsqu'elle les rencontre en des points également distants de leur intersection. La réciproque est-elle vraie ?

7. Quel est le lieu des points également éloignés des 3 arêtes d'un trièdre ?

– Les plans menés perpendiculairement aux faces d'un trièdre par les arêtes opposées à ces faces, passent par la même droite.

– Les plans menés par chacune des arêtes d'un trièdre et la bissectrice

de la face opposée, passent par la même droite.

— Toute section faite dans un angle trièdre rectangle par un plan perp. à l'une de ses arêtes, est un triangle rectangle. Rem.

— Le point de rencontre des hauteurs d'un triangle qu'on obtient en coupant un angle trièdre tri-rectangle par un plan qcq. est la projection du sommet de ce trièdre sur le plan. Rem.

— Si l'on coupe un trièdre tri-rectangle par un plan qcq. rencontrant les trois arêtes, 1°. le triangle intercepté sur chacune des faces est moyenne proportionnelle entre sa projection sur le plan sécant et la section que le plan détermine dans l'angle trièdre; 2°. le carré de cette section est égal à la somme des carrés de ses projections sur les faces de l'angle trièdre.

— Couper un angle polyèdre à quatre faces par un plan tel que la section soit un parallélogramme.

8.9. – Couper un cube par un plan tel que la section soit un hexagone régulier.

10.11. – Le volume d'un tronc de pyramide est $\frac{1}{3}h(B+b+\sqrt{Bb})$. – On peut éviter le calcul d'une des deux bases, puisqu'elles sont semblables. En effet, si l'on désigne par A et a deux côtés homologues de ces bases, on a $\frac{b}{B}=\frac{a^2}{A^2}$, d'où $b=B\times\frac{a^2}{A^2}$, par suite $V=\frac{B\times h}{3}\left(1+\frac{a}{A}+\frac{a^2}{A^2}\right)$, formule plus simple, puisqu'elle ne renferme plus de radicaux.

— Tout plan qui passe par les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre le divise en deux parties équivalentes.

— Si, par le sommet S du tétraèdre SABC, on trace la droite SD formant des angles égaux avec les faces SAB, SAC, SBC, et qu'on joigne les sommets A, B, C de la base au point D dans lequel cette droite rencontre ABC, les triangles DAB, DBC, DAC sont proportionnels aux faces SAB, SBC, SAC.

— On donne deux tétraèdres tels que les droites qui joignent deux à deux les sommets correspondants concourent en un même point. Démontrer que, si les faces correspondantes se coupent, les 4 droites d'intersection sont situées dans un même plan (Conc. de Lyc. Sc. 1853).

— Par un point de la base d'un tétraèdre régulier, on lui élève une perpendiculaire : elle rencontre toutes les faces latérales. La somme des distances des points de rencontre au plan de la base est constante.

14,15. Si l'on considère un tonneau comme la somme de deux troncs de cône réunis par leur grande base, le volume est $\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$. Ce volume est trop petit. En remplaçant Rr par R^2, on a la formule $\frac{1}{3}\pi H(2R^2+r^2)$ proposée par Oughtred et employée en Angleterre au jaugeage des tonneaux.

16. Le volume d'un tronc de cône $V=\frac{1}{3}\pi H(R^2+r^2+Rr)$ peut s'écrire $V=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2H+\frac{1}{3}\pi\left(\frac{R-r}{2}\right)^2H$. Si R-r est assez petit, on a simplement $V=\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2H$, formule employée pour les troncs d'arbre.

on a employé la même formule au Jaugeage des Tonneaux. Mais le volume ainsi obtenu est beaucoup trop petit. On se sert en France d'une autre formule, de Dez, ancien prof.r à l'Ecole Militaire. On considère le Tonneau comme un cylindre de même hauteur, ayant pour rayon de base l'excès du rayon de la bonde sur les $\frac{3}{8}$ de la différence des rayons de la bonde et du fond : $V = \pi \left[R - \frac{3(R-r)}{8}\right]^2 H$.

Voir, 1848, la comparaison de ces deux formules.

– Inscrire dans un cône un cylindre de surface convexe donnée. – Maxim.
– Calculer le rayon intérieur d'un tube de verre, qui pèse 90 gr. vide, et 150 gr. lorsqu'on y introduit une colonne de Mercure de 9 centim.
– Mener un plan parallèle à la base d'un cylindre, et divisant sa surface convexe en deux parties telles que la base du cyl. soit moy. prop. entre elles.

17, 18. Lieu Géom. des centres des sections faites dans une Sphère par des plans passant 1° par une droite, 2° par un point.
– La somme des cercles suivant lesquels les trois faces d'un trièdre tri-rectangle coupent une sphère est constante pour une position donnée du sommet de l'angle. – La somme des carrés des distances du sommet aux six points où les 3 arêtes percent la sphère est aussi constante.
– Trouver un point d'où l'on voie trois Sphères sous le même angle.
– Lieu des centres des Sphères qui coupent 2 sphères suiv.t des Gr. cercles.
– " " " " 3 " "
– Mener par un point un plan tangent à deux Sphères.
– Mener un plan Tangent à 3 Sphères. – Les 3 lignes des centres percent ce plan en 3 points qui ~~sont~~ en ligne droite.
– Mener par une droite un plan qui coupe deux Sphères de manière que les rayons des sections soient proportionnels à ces deux Sphères.
– Mener par un point un plan qui coupe trois Sphères de manière que les rayons des sections soient proportionnels à ceux des Sphères.

19. Si l'on inscrit et circonscrit à un demi-cercle deux demi-polygones réguliers semblables d'un nombre pair de côtés, la surface de la Sphère engendrée par le demi-cercle tournant autour de son diamètre est moy. prop. entre les surfaces engendrées par les Polygones.
– Th. d'Archimède, sur la Zône.
– Circonscrire à une Sphère un cône droit dont la surface convexe soit le double de la base.
– Inscrire dans une Sphère un Cyl. droit dont la somme des deux bases soit le double de la surf. convexe.
– Inscrire un cône dont la surf. convexe soit équivalente à celle de la calotte terminée au même cercle (2e Sc. Conc. 1854).
– Couper une Sphère par un plan tel que la section soit équivalente à la différence des deux zônes dans lesquelles ce plan partage la surface de la sphère.
– Couper une Sphère par un plan tel que l'aire d'un Grand cercle soit moy. prop. entre les deux zônes que ce plan détermine.

– Couper une Sphère par deux plans parallèles et également éloignés du centre, de manière que la somme des aires des deux sections soit égale à l'aire de la zone comprise entre les deux plans.

– Inscrire dans une sphère un cône dont la base soit équivalente à la moitié de la surface convexe.

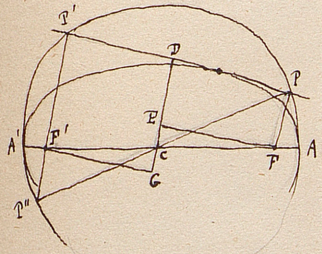
20. Si l'on joint par une ligne droite les milieux de deux côtés d'un triangle, et qu'ensuite on le fasse tourner autour du 3e. côté, quel sera le rapport des volumes engendrés par les deux parties de ce triangle ?

– Couper une sphère par un plan qui divise en deux parties équivalentes le secteur sphérique ayant pour base la plus petite des deux zones dans lesquelles ce plan décompose la surface de la sphère.

– Inscrire dans un demi-cercle un triangle rectangle tel que le volume qu'il engendre en tournant autour de son hypoténuse soit en rapport donné avec celui de la sphère décrite par le demi-cercle. – Max. de ce rapport.

Ellipse.

Th. Les points de contact de deux tangentes parallèles menées à une ellipse sont symétriques par rapport au centre. – facile, en partant des sécantes.

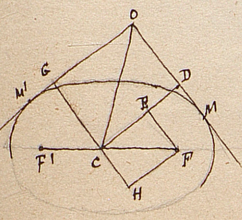


Th. Le produit des distances FP, F'P' des deux foyers F et F' d'une ellipse à une tangente quelconque PP', est constant.

Sur le grand axe AA' de l'ellipse comme diam. je décris une circonf. qui passe par les projections P et P' des foyers sur la tangente PP'. Je prolonge ensuite P'F' jusqu'au point P'', et je tire PP''. L'angle inscrit PP'' étant droit, la corde PP'' est un diamètre du cercle : donc elle passe par C, et les triangles CFP, CF'P'' sont égaux. J'en conclus $PF = P''F'$, et par suite, $PF . P'F' = P''F' . P'F' = A'F' . AF' =$
$= (a-c)(a+c) = a^2 - c^2 = b^2$.

Coroll. Si je mène de chaque foyer une parallèle à la tangente PP' jusqu'à la rencontre de la perp. tracée du centre sur cette tangente, les triangles rectangles FCE, F'CG sont égaux. Il en résulte 1°. que les côtés CG, CE sont égaux ; 2°. que la droite F'P' est égale à la somme des lignes CD, CG, et la droite FP à leur différence. Donc $F'P' . FP = CD^2 - CG^2$.
De là ce Th. « La différence des carrés des distances du centre d'une ellipse à une tangente et à sa parallèle menée par un foyer, est constante. »

Th. Le lieu géométrique des sommets des angles droits circonscrits à l'ellipse est un cercle concentrique.



Soit MOM' un angle droit circonscrit à l'ellipse FF'. Je trace par C une parallèle à chaque côté de cet angle jusqu'à la rencontre de la parallèle menée par le foyer F à l'autre côté. En appliquant successivement aux deux tangentes le Th. qui précède, j'ai $CD^2 - CE^2 = b^2$, $CG^2 - CH^2 = b^2$; ajoutant, et simplifiant à cause des triangles rectangles, $CO^2 - c^2 = 2b^2$, d'où $CO^2 = a^2 + b^2$

c.q.f.d.

– Construire une Ellipse dont on connaît les deux foyers et un point.
– Quel est le lieu géom. des points également distants de deux circonférences intérieures l'une à l'autre ?
– Construire une Ellipse dont on connaît la longueur des axes, un foyer et un point.
– Tout diamètre divise l'ellipse en deux parties égales.
– Le carré d'un diamètre quelconque est égal au carré du petit axe augmenté du carré de la différence des deux rayons vecteurs qui vont à l'une des extrémités de ce diamètre.
– Tout diamètre de l'ellipse est plus grand que le petit axe et moindre que le grand axe.
– La somme du carré de la droite qui joint un point d'une ellipse à son centre et du produit des deux rayons vecteurs du même point, est constante.
– Construire une ellipse, étant donnés les deux foyers et une tangente.
– " " " " un foyer et 3 tangentes.
– " " " " " deux tang. et l'un des contacts.
– " " " " " une tangente et deux points.
– " " " " la longueur du gr^d. axe, le centre et 2 tangentes.
– " " " " un sommet, un foyer et une tangente.
– Deux ellipses égales ont leurs grands axes situés sur la même ligne droite et sont tangentes. Si l'on fait rouler sans glissement l'une de ces ellipses sur l'autre, quel est le lieu géométrique de chacun des foyers de l'ellipse mobile ?
– Quel est le lieu géométrique des sommets des différents trapèzes qu'on peut construire sur une base donnée, avec cette double condition que l'autre base ait une longueur donnée et que la somme des deux côtés non parallèles soit aussi donnée ? – Quel est le lieu des points de rencontre des côtés non parallèles de ces trapèzes ? – et celui des intersections de leurs diagonales ?
– Étant donnés un cercle et un point dans son intérieur, si, sur chacun des diamètres de ce cercle on décrit une Ellipse qui ait ce diamètre pour grand axe et qui passe par ce point, quel sera le lieu géom. des foyers de ces Ellipses ?
– Soient MT, MT' deux tangentes menées par le point M à une ellipse dont les foyers sont F, F' ; si l'on prend sur ces tangentes des longueurs MO, MO' respectivement égales aux distances MF, MF', la droite OO' sera égale au grand axe de l'Ellipse (annales, T. VII)
– Le carré de la distance du foyer F de l'Ellipse à une tangente et le carré de la moitié du petit axe sont dans le même rapport que les rayons vecteurs FM, F'M du point de contact.
– Si un angle est circonscrit à une Ellipse, la portion d'une tangente mobile comprise entre les côtés de cet angle est vue de chaque foyer sous un angle constant.
– Le rectangle des segments interceptés par le grand axe d'une Ellipse et une tangente mobile sur les deux tangentes menées aux extrémités du grand axe, est constant.

- Le Lieu du sommet d'un angle droit circonscrit à deux Ellipses homofocales est un cercle concentrique (Chasles).
- L'Ellipse est une section conique, et cylindrique.
- Couper un cône ou un cylindre de manière que la section soit égale à une Ellipse donnée.
- Trouver les points de rencontre d'une droite avec une Ellipse non tracée, mais donnée par les foyers et le grand axe.

Parabole.

- Construire une Parabole dont on connait la directrice et deux points, ou le foyer et deux points.
- Lieu des foyers des Paraboles qui ont même directrice et un point commun.
- Lieu des points également distants d'une droite et d'une circonf.
- Lieu des foyers des Paraboles qui ont même directrice et une tangente commune? — Lieu de leurs sommets.
- Construire une Parabole dont on connait la directrice et deux tangentes, ou le foyer et deux tangentes.
- Tracer une parabole dont on connait la tangente au sommet et deux autres tangentes.
- Décrire une parabole qui touche 3 droites données.
- Trouver les points de rencontre d'une parabole donnée par son foyer et sa directrice, avec une droite.
- La droite qui divise en deux parties égales le supplément de l'angle des rayons vecteurs de deux points M et M' d'une Parabole coupe la directrice au même point que la sécante MM'.
- La tangente en un point de la parabole et la perp. menée par le foyer sur le rayon vecteur du point de contact se rencontrent sur la directrice.
- Décrire une Parabole dont on connait un point, la tangente en ce point, et le foyer ou la directrice.
- Les carrés des perp. menées du foyer sur deux tangentes à la parab. sont proportionnels aux rayons vecteurs des deux points de contact.
- Inscrire un cercle dans un segment de Parabole déterminé par une corde perp. à l'axe.
- Lieu des points tels que la somme ou la différence des distances de chacun d'eux à un point fixe et à une droite fixe, est constante.
- Si, par le foyer d'une parabole, on mène une perp. à son axe et que l'on prenne, à partir du foyer, sur cette perp. deux distances égales, le trapèze formé en abaissant de ces points des perp. sur les tangentes est constant (Ann. 1845).

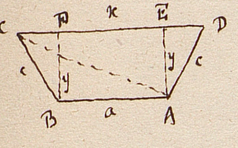
– Si des différents points N d'une tangente CM à une parabole on mène deux droites, l'une FN au foyer F, l'autre NB tangente, l'angle FNB de ces deux droites est constant (ann. 1845).
– Si des différents points K d'une corde de contact de deux tangentes AC, AB à une parabole, on mène deux parallèles KD, KE aux deux tangentes, il en résulte un parallélogramme dont la seconde diagonale DE est tangente à la parabole (ann. 1845).
– La distance du foyer d'une parabole au sommet d'un angle circonscrit à cette courbe est moyenne prop. entre les rayons vecteurs des points de contact.
– Si un angle est circonscrit à une parabole, une tangente mobile coupe les deux côtés de cet angle en deux points tels que le produit de leurs distances au foyer de la parabole est directement proportionnel à la distance du foyer au point de contact de la tangente mobile.
– Lorsqu'un quadrilatère est circonscrit à une parabole, le produit des distances du foyer à deux sommets opposés du quadrilatère est égal au produit des distances du foyer aux deux autres sommets.
– Étant donnés sur un plan deux points fixes A, B, et un système de paraboles ayant le même foyer F, si l'on mène par les points A et B quatre tangentes à l'une de ces paraboles, le produit des rayons vecteurs des quatre points de contact est constant.
– La parabole est une section conique.

Hélice.

– Quel est le plus court chemin entre deux points d'un cylindre ?
– Si par un point de l'espace on mène des parallèles aux tangentes de tous les points d'une spire d'hélice, ces droites formeront une surface conique de révolution.
– Si l'on trace par un point d'une surface cylindrique à base circulaire deux hélices qui se coupent à angle droit, la circonférence de la base du cylindre est moyenne proportionnelle entre les pas de ces hélices. – Quel est le lieu géométrique des points d'intersection de ces deux courbes ? – Les mêmes hélices divisent la surface du cylindre en quadrilatères égaux. Calculer l'aire de l'un de ces quadrilatères en fonction des pas des deux hélices.

1579. Solution d'une question proposée aux Examens d'admission à l'École Navale (1856). – Méthode élémentaire remarquable pour résoudre quelques questions de maximum et de minimum d'une fonction de plusieurs variables. –

Problème. – On donne la plus petite des deux bases AB, CD d'un trapèze ABCD, et la longueur des côtés non parallèles BC, AD supposés égaux entre eux : déterminer le maximum de l'aire du trapèze.



Menons les hauteurs AE, BF, et posons

$$AB = a\,,\quad BC = AD = c\,,\quad CD = x\,,\quad AE = BF = y$$

L'aire du trapèze sera exprimée par $\left(\frac{x+a}{2}\right)y$. D'ailleurs on a $DE = FC$, et par suite $DE = \frac{x-a}{2}$: ce qui donnera

$$y = \sqrt{c^2 - \left(\frac{x-a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4c^2-(x-a)^2}$$

Donc

$$\left(\frac{x+a}{2}\right)y = \frac{1}{4}\sqrt{(x+a)^2\left[4c^2-(x-a)^2\right]}$$

Il s'agit donc de rendre maximum la quantité sous le radical, que l'on peut écrire ainsi

$$(1)\qquad (x+a)(x+a)(x+2c-a)(2c+a-x)$$

Cela posé, désignons par α, β, γ trois nombres quelconques, et mettons le produit (1) sous cette forme

$$\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+2c-a}{\beta}\right)\left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right).\,\alpha^2\beta\gamma$$

Le nombre $\alpha^2\beta\gamma$ étant constant, il est clair que le maxim. cherché correspond au maximum de

$$(2)\qquad \left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+a}{\alpha}\right)\left(\frac{x+2c-a}{\beta}\right)\left(\frac{2c+a-x}{\gamma}\right)$$

Or les valeurs des nombres α, β, γ étant arbitraires, on en pourra disposer de manière que la somme des 4 facteurs de (2) soit constante, c.à.d. indépendante de x : il suffit pour cela que l'on ait

$$(3)\qquad \frac{2}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} = 0$$

Cette première condition étant supposée remplie, il faudra, pour que le produit (2) soit maximum, que ses facteurs soient égaux entre eux. On aura donc

516

$$(4)\qquad \frac{x+a}{\alpha} = \frac{x+2c-a}{\beta}$$

$$(5)\qquad \frac{x+a}{\alpha} = \frac{2c+a-x}{\gamma}$$

La valeur positive de x tirée des équations (3), (4), (5) représentera la plus grande des deux bases du trapèze maxim.

Des Eq. (4) et (5) on tire

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x+a}{x+2c-a}\right) \qquad \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{x+a}{2c+a-x}\right)$$

reportant dans (3), on a

$$2 + \frac{x+a}{x+2c-a} - \frac{x+a}{2c+a-x} = 0$$

D'où

$$2\left[4c^2-(x-a)^2\right] + 2(x+a)\cdot(a-x) = 0$$

développant et réduisant, on trouve l'équation

$$(6)\qquad x^2 - ax - 2c^2 = 0$$

dont la racine positive

$$x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 2c^2}$$

est la plus grande des deux bases du trapèze cherché. Les quatre côtés du trapèze étant déterminés, il sera facile de le construire et d'avoir l'expression de sa surface en fonction des données a, c.

L'équation (6) donne

$$x(x-a) = 2c^2$$

ou

$$x\left(\frac{x-a}{2}\right) = c^2$$

or $x = CD$ et $\frac{x-a}{2} = DE$. Donc

$$CD \cdot DE = \overline{DA}^2$$

Donc le triangle CAD est rectangle en A. Il s'ensuit que CD est le diamètre du cercle circonscrit au trapèze.

Lorsque $c = a$, la valeur de $x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4}+2c^2}$ se réduit à $2a$, les côtés CB, BA, AD sont égaux au rayon

du cercle circonscrit, et chacun des deux angles DAB, ABC est égal à 120°. (Annales, 1857, Gérono).

1580. Sur un Problème de Géométrie.

Étant données les équations

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

(2) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

en déduire

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

et $A + B + C = 180°$.

1°. En additionnant (1) et (2), on trouve

(4) $c = a \cos B + b \cos A$

et, en retranchant (2) de (1), il vient

(5) $a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A)$

La multiplication des Eq. (4) et (5) donne ensuite

$$a^2 - b^2 = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

d'où

$$a^2 \sin^2 B = b^2 \sin^2 A$$

et

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

2°. L'Eq. (4) peut s'écrire

$$1 = \frac{a}{c} \cos B + \frac{b}{c} \cos A$$

Mais les relations $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ donnent

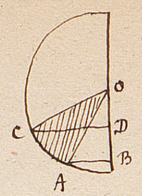
$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \qquad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

Donc

$$\sin C = \sin (A + B)$$

$$A + B + C = 180°$$

1581. Problème. — Étant donné le volume d'un secteur sphérique, trouver la valeur extrême de l'aire totale. — Discussion.



Le volume d'un secteur sphérique est égal au produit de la hauteur h de la zone qui lui sert de base par un facteur constant $\frac{2}{3}\pi R^2$; par suite, si le volume est donné, h est une quantité constante.

Donc, pour étudier les variations de l'aire totale du secteur, aire qui est

$$2\pi Rh + \pi R(AB + CD)$$

il suffit d'étudier les variations de $AB + CD$.

Or, si nous appelons x l'angle AOB, et y l'angle COB, la question revient à chercher le maximum de

$$(1) \qquad R(\sin x + \sin y) = m$$

sachant que

$$(2) \qquad R(\cos x - \cos y) = h$$

Comme les angles x et y sont compris entre $0°$ et $180°$, leurs sinus seront toujours positifs; on peut donc chercher le maximum de m^2.

Élevant au carré les Éq. (1) et (2) et ajoutant, on a

$$2R^2(1 + \sin x \sin y - \cos x \cos y) = m^2 + h^2$$

ou

$$m^2 = 2R^2[1 - \cos(x+y)] - h^2$$

Dans le second membre, il n'y a que $\cos(x+y)$ qui soit variable; il est clair que m^2 sera maximum quand $\cos(x+y)$ sera égal à -1. Mais alors

$$x + y = 180°$$

$$m = R(\sin x + \sin y) = 2R\sin x$$

$$h = R(\cos x - \cos y) = 2R\cos x$$

d'où

$$\cos x = \frac{h}{2R} \qquad \sin x = \frac{\sqrt{4R^2 - h^2}}{2R} \qquad m = \sqrt{4R^2 - h^2}$$

Remplaçant h par sa valeur en fonction du volume v donné, il vient

$$m = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{3V}{2\pi R^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{16\pi^2R^6 - 9V^2}}{2\pi R^2}$$

remplaçant m par sa valeur dans l'expression de la surface cherchée, on a pour cette surface S

$$S = \frac{3V}{R} + \frac{\sqrt{(4\pi R^3)^2 - (3V)^2}}{2R}$$

on voit que la condition de possibilité du problème est

$$V < \frac{4}{3}\pi R^3.$$

1582. Trouver deux nombres entiers dont le rapport soit égal à la différence (Ec. Navale, 1856).

$$\frac{x}{y} = x - y$$

d'où

$$x = \frac{y^2}{y-1}$$

$y-1$ doit diviser y^2. or $y-1$ est premier avec y, donc avec y^2. donc $y-1=1$, $y=2$, et $x=4$.

1583. Etant donnés un cercle et deux perpendiculaires à l'extrémité d'un diamètre AB, mener une tangente CD telle que le volume engendré par le trapèze ainsi formé tournant autour du diamètre AB soit égal à une sphère de rayon donné (Lyc. Sc. Conc. 1856).

1584. Dans un triangle rectangle dont la somme des côtés de l'angle droit est constante, trouver la perp. maximum abaissée sur l'hypoténuse. (id. id.)

1585. Trouver le rayon de la base supérieure d'un tronc de cône, sachant que le rayon de la base infé-rieure égale le rayon d'une sphère donnée, et que le volume du tronc et celui de la sphère sont dans

un rapport donné (Seconde Sc. Conc. 1856).

1586. Trouver les intersections de deux paraboles dont on connaît les directrices et les foyers. (Object. id.)

1587. On inscrit dans un cercle un quadrilatère ABCD dont deux côtés contigus AB, AC sont égaux : on tire les deux diagonales AD, BC qui se coupent en un point T. Démontrer que chacun des côtés égaux AB, AC est moyen proportionnel entre la diagonale entière AD et le segment AT de la diagonale AD (3e Sc. id.)

1588. Comparaison de deux formules pour le jaugeage des tonneaux (1578).

La formule d'Oughtred donne $V = \frac{1}{3}\pi h\,(2R^2+r^2)$

et celle de Bez $V' = \pi h \left\{R - \frac{3(R-r)}{8}\right\}^2$

Cherchons $V - V'$. Et d'abord, on a

$$V' = \frac{\pi h}{64}\,(5R+3r)^2$$

donc

$$V - V' = \frac{\pi h}{3.64}\left((2R^2+r^2)64 - (25R^2+30Rr+9r^2)3\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3.64}\left(53R^2+37r^2-90Rr\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3.64}\left(53R^2+90r^2-53r^2-90Rr\right)$$

$$= \frac{\pi h}{3.64}\left[53(R^2-r^2)-90r(R-r)\right]$$

$$= \frac{\pi h(R-r)}{3.64}\left(53R+53r-90r\right) = \frac{\pi h(R-r)}{3.64}\left(53R-37r\right)$$

valeur évidemment positive. Donc $V > V'$. (N.M.)

1589. Sur quelques questions de Maximum et de Minimum.

1°. On sait que, pour $x+y=a$, $x^m . y^n$ est maximum si $\frac{x}{m} = \frac{y}{n}$.

2°. Cette règle s'étend au cas où les exposants m et n sont fractionnaires.

Car, soit

$$x^{\frac{m}{\alpha}} y^{\frac{n}{\beta}} = \text{max.}$$

on peut rendre maximum la puissance $\alpha\beta$, c. à d.

$$x^{m\beta} . y^{n\alpha}.$$

et alors, on devra avoir

$$\frac{x}{m\beta} = \frac{y}{n\alpha}$$

ou

$$\frac{x}{\left(\frac{m}{\alpha}\right)} = \frac{y}{\left(\frac{n}{\beta}\right)} \qquad \text{c.q.f.d.}$$

3°. Elle s'étend encore au cas où tous les exposants sont négatifs, mais alors, on a un minimum.

C'est évident : car le minimum de

$$x^{-m} y^{-n} = \frac{1}{x^m . y^n}$$

aura lieu en même temps que le maximum du dénominateur, donc...

4°. Pour $y-x=a$, $x^{\alpha} y^{-\beta}$ est maximum ou minimum suivant que α est plus petit ou plus grand que β, et l'on a $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta}$.

En effet, on a

$$y = x + a$$

et l'on a à rendre maximum ou minimum

$$\frac{x^\alpha}{y^\beta} \quad \text{ou} \quad \frac{x^\alpha}{(a+x)^\beta}$$

ou encore

$$\left(\frac{x}{a+x}\right)^\alpha \left(\frac{1}{a+x}\right)^{\beta-\alpha} \qquad \text{si } \beta > \alpha$$

ou encore

$$\left(\frac{x}{a+x}\right)^\alpha \left(\frac{a}{a+x}\right)^{\beta-\alpha}$$

Mais

$$\frac{x}{a+x} + \frac{a}{a+x} = 1$$

Donc

$$\frac{\frac{x}{a+x}}{\frac{a}{a+x}} = \frac{x}{a} = \frac{\alpha}{\beta-\alpha}$$

D'où

$$\frac{x}{a+x} = \frac{x}{y} = \frac{\alpha}{\beta} \qquad \text{c q f d.}$$

et il y a maximum.

On démontrera de même l'autre cas, en prenant l'inverse.

5°. Trouver le minimum de

$$Ax^m + \frac{B}{x^n}$$

ou de

$$\frac{Ax^{m+n} + B}{x^n}$$

Cela revient à chercher le maximum de

$$\frac{x^n}{Ax^{m+n} + B}$$

ou de

$$\left(\frac{x^n}{Ax^{m+n} + B}\right)^{\frac{m+n}{n}}$$

ou

$$\frac{x^{m+n}}{(Ax^{m+n} + B)^{1+\frac{m}{n}}}$$

ou encore

$$\frac{x^{m+n}}{Ax^{m+n}+B}\left(\frac{1}{Ax^{m+n}+B}\right)^{\frac{m}{n}}$$

ou bien

$$\frac{Ax^{m+n}}{Ax^{m+n}+B}\left(\frac{B}{Ax^{m+n}+B}\right)^{\frac{m}{n}}$$

Donc on doit avoir

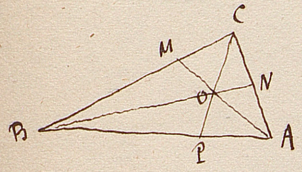
$$\frac{Ax^{m+n}}{B}=\frac{1}{\frac{m}{n}}=\frac{n}{m}$$

$$x=\sqrt[m+n]{\frac{Bn}{Am}}$$

1590. Théorème : Si un triangle a deux bissectrices égales, il est isocèle.

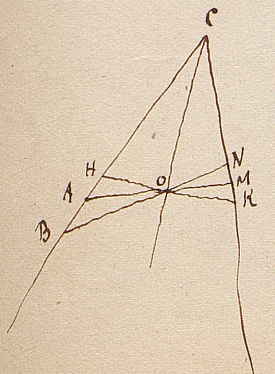
1°. Par la Géométrie.

Je vais d'abord démontrer que dans un triangle, au plus grand côté correspond la plus petite bissectrice.



Soit CB > CA. Je dis que BN > AM.

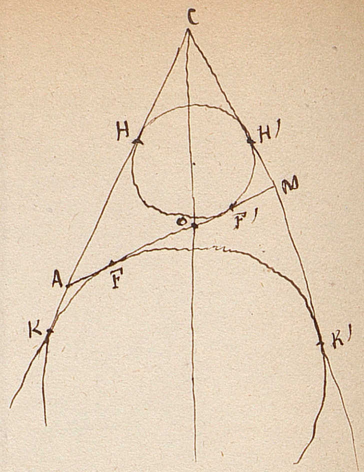
Remarquons d'abord que l'angle AOP < 90°, car il est extérieur au triangle AOC, et vaut par conséquent $\frac{A}{2}+\frac{C}{2}$. De même BOP < 90°.



Le problème revient évidemment à prouver que si l'on prend CB > CA > CH, puis qu'on mène BON et AOM, on a BN > AM.

Or c'est ce qui est connu, et ce que l'on peut d'ailleurs faire voir de la manière suivante :

Construisons pour AM la figure ci-contre.



On a $AF = AK$, $AF' = AH$ donc

$$AF + AF' = KH$$

De même $MF' = MH'$, $MF = MK'$ donc

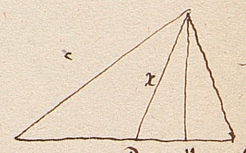
$$MF' + MF = H'K'$$

Mais $HK = H'K'$. Donc $AF = MF'$ et

$$AM = HK.$$

Maintenant, si au lieu de AM on prenait une autre sécante passant par O, A étant plus bas, il est clair que KH augmenterait. Donc...

Conséquence : si deux bissectrices sont égales, le triangle est isocèle ; — car, sinon, etc.



2°. Par l'algèbre Géométrique. —

Cherchons à évaluer x.

$$b^2 = x^2 + \overline{CD}^2 - 2\,CD \times DH$$

$$DH = CD - CH$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CH \quad \left\{ CH = \frac{a^2+b^2-c^2}{2a} \right.$$

$$DH = \frac{ab}{b+c} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

$$b^2 = x^2 + \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} - 2\frac{ab}{b+c}\left\{\frac{ab}{b+c} - \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}\right\}$$

$$b^2 = x^2 - \frac{a^2b^2}{(b+c)^2} + 2\frac{ab}{b+c}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$$

$$b^2(b+c)^2 = x^2(b+c)^2 - a^2b^2 + b(b+c)(a^2+b^2-c^2)$$

$$= x^2(b+c)^2 - \cancel{a^2b^2} + \cancel{a^2b^2} + a^2bc + b(b+c)^2(b-c)$$

$$= [x^2(b+c)^2 + a^2bc + b^2(b+c)^2 - bc(b+c)^2$$

et enfin $$x^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2}$$

on aurait de même
$$y^2 = ca - \frac{b^2ca}{(c+a)^2}$$

on peut maintenant continuer de 2 manières :

A) on a
$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right)}{ac\left(1 - \frac{b^2}{(a+c)^2}\right)}$$

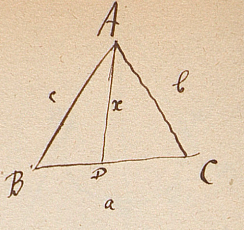
si $a > b$, on a $\frac{b}{a+c} < \frac{a}{b+c}$: car on en tire $b^2 + bc < a^2 + ac$ ce qui résulte de $a > b$. Donc alors $x^2 < y^2$. on achève alors par la Géométrie, en raisonnant par l'absurde.

B) Supposons $x^2 = y^2$. alors
$$b - \frac{a^2b}{(b+c)^2} = a - \frac{b^2a}{(a+c)^2}$$
$$b - a = \frac{a^2b}{(b+c)^2} - \frac{b^2a}{(a+c)^2}$$
$$\frac{b-a}{ab} = \frac{a}{(b+c)^2} - \frac{b}{(a+c)^2} = \frac{a^3 + 2a^2c + ac^2 - b^3 - 2b^2c - bc^2}{m^2}$$
$$= \frac{a^3 - b^3 + 2c(a^2 - b^2) + c^2(a-b)}{m^2}$$

divisant par $(a-b)$
$$-\frac{1}{ab} = \frac{a^2 + ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2}{m^2} = K^2$$ absurde.

donc on ne peut diviser par $a - b$, et $a = b$ cqfd.

t.s.v.p.



3°. par la Trigonométrie.

on a
$$\frac{x}{\sin B} = \frac{BD}{\sin\frac{A}{2}} = \frac{ac}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

d'où
$$x = \frac{ac\sin B}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{abc}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}\cdot\frac{\sin B}{b} = \frac{abc}{2R}\cdot\frac{1}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}.$$

de même
$$y = \frac{abc}{2R}\cdot\frac{1}{(a+c)\sin\frac{B}{2}}$$

si $x = y$
$$(b+c)\sin\frac{A}{2} = (a+c)\sin\frac{B}{2}$$

ou
$$(\sin B + \sin C)\sin\frac{A}{2} = (\sin A + \sin C)\sin\frac{B}{2}$$

d'où
$$\sin C\left(\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{B}{2}\right) = \sin A\sin\frac{B}{2} - \sin B\sin\frac{A}{2}.$$
$$= 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left[\cos\frac{A}{2} - \cos\frac{B}{2}\right]$$

Ce qui est impossible à moins que $A = B$. Car si $A > B$, le 1er membre est > 0 et le 2e < 0

NEMO.

Rem. Le moyen le plus rapide pour trouver x est le suivant

$$(bx + cx)\sin\frac{A}{2} = bc\sin A$$

$$x = \frac{bc\sin A}{(b+c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2S}{(b+c)\sin\frac{A}{2}}$$

1591. Compositions du Concours Général.

année 1856.

Mathématiques Spéciales.

1°. Développer en série le Logarithme de $1+x$, et expliquer l'usage de cette série pour le calcul numérique des Logarithmes.

2°. On suppose que quatre forces se font équilibre sur un corps solide : démontrer que, sauf certains cas particuliers, on peut faire passer un hyperboloïde à une nappe par les directions de ces quatre forces.

Logique Littéraire.

1°. Expliquer les règles de la division des fractions et de la division des nombres décimaux.

2°. Circonscrire à un cercle donné un Losange tel que les surfaces du Losange et du cercle soient entre elles comme deux lignes données.

Logique Scientifique.

1°. On donne une circonférence O, dans laquelle on trace un diamètre AB ; on trace deux tangentes aux points A et B. On demande de mener une tangente CD, telle que le volume engendré par le trapèze ABCD soit égal au volume d'une sphère donnée.

2°. Exposer la méthode à suivre dans les questions de maximum ou de minimum qui se rapportent aux équations du deuxième degré. — appliquer les principes au problème suivant : dans tous les triangles rectangles dont la somme des côtés est constante, quel est celui dans lequel la perpendiculaire abaissée du côté de l'angle droit sur l'hypoténuse est maximum ?

Rhétorique Scientifique.

1°. Des Ellipses.

2°. Etant donné sur une même droite les sommets et les foyers de deux paraboles, construire les points communs à ces deux courbes.

3. Mécanique.

1°. Définir le mouvement uniformément accéléré ou retardé. Indiquer les moyens à l'aide desquels on constate par l'expérience les lois fondamentales de ce mouvement.

2°. Qu'entend-on par poulie fixe, poulie mobile, et par moufle ?

Seconde Scientifique.

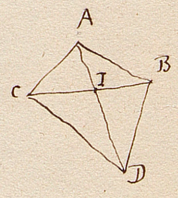
1°. Volume de la Pyramide tronquée. – Volume du tronc de cône.

2°. Un tronc de cône a pour hauteur le diamètre d'une sphère donnée : le rayon de sa base inférieure est égal au rayon de la sphère : on demande de calculer le rayon de sa base supérieure, connaissant le rapport de son volume à celui de la sphère.

Troisième Scientifique.

1°. Extraire la racine carrée du nombre 19 à 0,01 près. Donner sur cet exemple la théorie de l'opération.

2°. On donne un quadrilatère ABCD inscrit dans une circonférence de cercle ; deux côtés contigus, AB et AC, sont égaux ; on tire les diagonales AD et BC, qui se coupent en un point I : on demande de démontrer que chacun des côtés AB, AC est moyen proportionnel entre AD et AI.



Année 1857.

Mathématiques Spéciales.

Deux courbes du second degré C et C' situées dans un plan étant données, par un point A pris sur la première, on mène des cordes AP et AQ parallèles à deux diamètres conjugués quelconques de la seconde ; démontrer que toutes les droites telles que PQ que l'on peut obtenir en faisant varier la direction des cordes AP, AQ, vont passer par un même point.

Logique Littéraire.

1°. Etant donné un hexagone régulier ABCDEF, inscrit dans un cercle, on abaisse du centre O sur les côtés non consécutifs AB, CD, EF les perpendiculaires OM, ON, OP qu'on prend égales au côté du carré inscrit dans le même cercle - on propose de démontrer que le triangle MNP ainsi obtenu est équivalent à l'hexagone.

2°. Un vase cylindrique de 0m,22 de profondeur contient pour 1200 fr. de mercure. On demande de déterminer le rayon de sa base : sachant que le litre de Mercure pèse 13k,6, et en supposant que la valeur du kil. de ce métal soit 12fr,20.

Logique Scientifique.

1°. Démontrer qu'une équation du deuxième degré à une inconnue, ne peut avoir que deux racines.

2°. Etant donnés, sur un plan, une droite et un cercle, l'angle formé en joignant un point de la circonférence aux deux extrémités de la droite est-il susceptible ou non de maximum ou de minimum ?

Rhétorique Scientifique.

1°. Expliquer comment on a pu déterminer la distance de la Lune à la Terre, et le diamètre réel de cet astre. Faire connaître les lois du mouvement de rotation de la Lune autour de son propre centre, et examiner quelle est la portion de sa surface qui peut devenir visible pour nous.

2°. Etant donnés le foyer et la directrice d'une parabole, trouver sur l'axe un point d'où l'on puisse mener à la courbe deux normales comprenant entre elles un angle égal à un angle donné.

id. Mécanique.

1°. Faire connaître les lois de la chute des corps, et les appareils à l'aide desquels on peut les étudier.

2°. Dans une des faces verticales d'un réservoir à eau R, se trouve percé, en mince paroi, un orifice Z, dont la hauteur au-dessus du sol est égale à 2 mètres.

Cela posé, on demande à quelle hauteur au dessus de cet orifice Z il faudra maintenir le niveau de l'eau dans le réservoir, pour que le point B, où le jet touche le sol, soit à 2 m. du point A, où la verticale qui passe par le centre de l'orifice vient elle-même toucher le sol. on fait abstraction de la résistance de l'air.

Seconde Scientifique.

1°. on a vendu deux terrains rectangulaires à raison de 15000 fr. l'hectare. Le 1er acquéreur a payé son lot 18000 fr; le second a payé le sien 12000 fr. de plus, mais son terrain est plus long de 50 m. et plus large de 20 m. on demande les dimensions des deux rectangles.

2°. on circonscrit à un cercle un hexagone régulier ABCDEF on mène le diamètre FC et les diagonales AC et BF qui se coupent en un point I sur le rayon OH perpendiculaire à FC. Si l'on fait tourner la figure autour de OH comme axe, les triangles FIC, AIB engendreront des cônes. on demande l'expression de leurs surfaces et celles de leurs volumes en fonction du rayon du cercle.

Troisième Scientifique.

1°. Etant données dans un plan deux circonférences concentriques et un point, mener par ce point une sécante telle que la portion de cette droite comprise entre les deux circonférences soit égale à une longueur donnée.

2°. Calculer à moins de 1 centim. carré près la surface d'une Losange, sachant que la plus petite diagonale est égale à l'un des côtés, et que la plus grande a une longueur de $1^m,98$.

---

année 1853.

Mathématiques Spéciales.

Donner une définition Géométrique de la Parabole, et, partant de cette définition, exposer Géométriquement les diverses propriétés de la courbe.

[53]

Logique Littéraire.

1°. Calculer à un millimètre près le rayon d'un cercle, sachant que si ce rayon augmentait d'un centimètre, l'aire du cercle augmenterait d'un mètre carré.

2°. Etant données trois droites parallèles, mais non situées dans un même plan, on porte sur l'une d'elles une longueur distance AB égale à une longueur donnée, et l'on prend arbitrairement un point C sur la seconde et un point D sur la troisième. — Considérant la pyramide triangulaire ABCD, on propose de démontrer, 1°. que le volume de la pyramide est indépendant de la position des points C et D sur les droites où ils se trouvent; 2°. que ce volume est proportionnel à la longueur AB; 3°. qu'il reste le même quelle que soit celle des trois parallèles sur laquelle on porte la longueur AB.

Logique Scientifique.

1°. Etant donnés dans un même plan deux polygones semblables, trouver dans le plan un point tel que les droites menées de ce point à deux sommets homologues quelconques, fassent entre elles un angle constant.

2°. On donne deux tétraèdres ABCD, abcd tellement choisis que les droites Aa, Bb, Cc, Dd qui joignent deux à deux les sommets homologues, concourent en un même point. — On demande de démontrer que, si les faces correspondantes se coupent, les quatre droites d'intersection sont dans un même plan.

Troisième Scientifique.

1°. Un terrain, dont la forme est celle de l'hexagone régulier, a une superficie de 34 ares 19 centiares. On demande de calculer son côté.

2°. Etant donnés sur une carte quatre points non en ligne droite, tracer sur cette carte une route circulaire qui passe à égale distance de chacun des points.

532

année 1852.

Mathématiques Spéciales.

Démontrer le théorème suivant relatif à l'Hyperbole: Si l'on prend pour diamètre d'un cercle la portion de l'axe non transverse comprise entre le centre et la normale en un point quelconque de la courbe, la tangente menée au cercle par ce dernier point est égale au demi-axe réel.

Se servir de cette propriété pour résoudre le problème suivant: Etant donnés les deux sommets et un troisième point quelconque de l'hyperbole, construire la normale en ce point. — Indiquer les propriétés et les constructions analogues pour l'Ellipse.

Logique Littéraire.

1°. Prouver que si l'on fait tourner alternativement un parallélogramme autour de deux côtés non parallèles, les volumes des solides ainsi obtenus sont dans le rapport inverse des côtés.

2°. Calculer le côté d'un losange, sachant que ce côté est égal à sa plus petite diagonale, et que sa surface est équivalente à celle d'un cercle ayant 10 mètres de rayon.

Logique Scientifique.

1°. Dans un tétraèdre, on peut considérer pour chaque arête 1°. l'angle dièdre des deux faces qui se coupent suivant cette arête; 2° les inclinaisons de cette même arête sur chacune des deux autres faces auxquelles elle se termine; ce qui, pour les six arêtes considérées simultanément, donne en tout 18 angles. — On propose de démontrer que la somme de ces 18 angles est constante et égale à 12 angles droits dans tout tétraèdre où les arêtes opposées sont perpendiculaires entre elles.

2°. Dans tout tétraèdre, quand, sur les six arêtes, il y en a deux qui sont respectivement perpendiculaires aux deux arêtes qui leur sont opposées, on propose de

démontrer que les deux arêtes restantes sont aussi perpendiculaires l'une sur l'autre.

3°. Démontrer que, dans un tétraèdre où chaque arête est perpendiculaire à son opposée, les quatre hauteurs se rencontrent en un même point.

Seconde Scientifique.

1°. Inscrire dans une sphère donnée un cône dont la surface convexe soit équivalente à celle de la calotte sphérique qui se termine au même cercle.

2°. Calculer les côtés d'un triangle dont le périmètre a $1^m,20$, et dont deux angles ont respectivement pour valeur

le premier $35° \, 17' \, 15''$
le second $62° \, 43' \, 30''$

Troisième Scientifique.

1°. Étant donné un triangle quelconque ABC, on diminue le côté AC d'une quantité arbitraire AA', et l'on augmente le côté BC d'une quantité égale BB'. Démontrer que la nouvelle base A'B' sera coupée par l'ancienne dans le rapport inverse des côtés primitifs AC et ABC.

2°. Calculer à moins d'un millimètre près, et sans le secours des Logarithmes, la circonférence qui a pour rayon la diagonale d'un carré de 5 décimètres de côté, et faire voir qu'on a obtenu l'approximation demandée.

Année 1858.

Mathématiques Spéciales.

K étant un nombre donné, et α un angle aussi donné compris entre 0° et ±180°; g, b et h étant des inconnues auxiliaires liées par les relations:

$$G \sin g = - \sin \alpha$$

$$G \cos g = K \sin \alpha + \cos \alpha$$

$$h = \frac{G \sin^3 \alpha}{K} \qquad (??)$$

on demande les racines réelles de l'équation

$$h \sin^4 x - \sin (x - \alpha) = 0$$

on donnera à G le même signe que K.

Logique Littéraire.

1°. Exposer la marche à suivre pour obtenir la racine carrée du nombre 118400.

2°. Faire connaître les propriétés des polygones semblables, et leur application au levé des plans.

Logique Scientifique.

Démontrer les propositions suivantes :

1°. Étant donnés deux angles trièdres égaux et ayant le même sommet, on peut toujours mener par ce sommet une droite telle que si l'on fait tourner le premier trièdre autour de cette droite comme axe, il vienne coïncider avec le second.

2°. Si deux nombres N et N' jouissent de cette propriété que chacun d'eux est la somme des carrés de deux nombres entiers, le produit NN' de ces nombres sera également la somme des carrés de deux nombres entiers.

(pas de prix décerné.)

Rhétorique.

On donne dans un plan deux points A, B, et une droite CD.

1°. Déterminer une ellipse qui, ayant A et B pour foyers, soit tangente à la droite CD.

2°. prouver que toute ellipse décrite des mêmes foyers A, B, et dont le grand axe surpasse celui de l'ellipse trouvée, coupe la droite CD en deux points.

3°. Démontrer que le problème de déterminer une ellipse ayant pour foyers les points A et B, et telle que la corde

interceptée sur la droite CD soit de longueur donnée, est toujours possible, et n'a jamais qu'une solution.

Seconde.

1°. Étant donné un triangle ABC, dans lequel l'angle en A est aigu, déterminer la droite menée par le point A extérieurement au triangle et dans son plan, telle que le volume engendré par le triangle, en tournant autour de cette droite, soit le plus grand possible.

2°. Discussion complète des formules .. $ax+by=c$, $a'x+b'y=c'$.

Troisième.

Trois triangles APB, AQB, ARB, ont une base commune AB. Ces triangles sont entièrement donnés, et l'on connaît les angles et les côtés de chacun d'eux.
On demande de calculer les angles du triangle formé par les bissectrices des trois angles APB, AQB, ARB.
On fera l'application au cas où l'on a

$PAB=\frac{2}{5}$ $QAB=\frac{5}{17}$ $RAB=\frac{2}{23}$, $PBA=\frac{5}{11}$ $QBA=\frac{17}{13}$ $RBA=\frac{33}{19}$

Année 1859.

Mathématiques Spéciales.

Par un point de l'axe d'un paraboloïde de révolution, on mène une sécante, et par les points où cette sécante rencontre la surface, on mène des normales à la section méridienne qui les contient. On demande le lieu du point de rencontre de ces normales, quand la sécante tourne autour du point fixe qui est sur l'axe.
On examinera si tous les points de la surface trouvée font réellement partie du lieu.

Logique Littéraire.

1°. Démontrer que, si l'on prolonge dans un même sens les côtés d'un hexagone régulier de quantités égales à ces côtés eux-mêmes, et que l'on joigne par des droites consécutives les extrémités de ces prolongements, on obtiendra un polygone régulier dont la surface sera triple de celle du polygone donné.

536

2°. On a 3 sphères ayant respectivement pour diamètres $0^m,183$ $0^m,215$ $0^m,511$. Quel devrait être le rayon de la base d'un cône de $0^m,32$ de hauteur pour que son volume fût équivalent à la somme des trois sphères ?

Logique scientifique.

1°. Par le point de contact A de deux circonférences données, on mène deux cordes AB et AD qui soient dans un rapport donné ; et des centres O, C, on abaisse des perpendiculaires sur ces cordes. On demande le lieu géométrique du point de rencontre M de ces perpendiculaires.

2°. Sur un cercle donné O, on prend à volonté un arc ANB, et sur la corde AB de cet arc, on décrit une demi-circonférence AMB ; puis on fait tourner la figure autour du diamètre perp. à AB. On demande quelle doit être cette corde pour que la somme des surfaces décrites par les lignes AMB, ANB, soit maxim.

Rhétorique.

1°. Définir l'A et la D. d'une étoile.

2°. Connaissant l'A et la D. d'une étoile, peut-on dire en quel point de la terre cette étoile se montre au zénith ?

3°. Quand une étoile passe un jour au zénith d'un observatoire, y passe-t-elle également tous les autres jours de la même année ?

4°. Si le premier passage a lieu à minuit, les passages suivants auront-ils lieu avant ou après minuit ?

5°. La différence entre les heures de deux passages successifs dépend-elle de l'époque de l'année à laquelle se font les observations ? Donner sur ce point quelques détails.

6°. Dans un temps considérable, dans six mille ans par exemple, l'étoile qui passe aujourd'hui au zénith d'un lieu y passera-t-elle encore ?

7°. Dans combien de temps l'étoile, après avoir cessé de passer au zénith d'un lieu, y reviendra-t-elle de nouveau ? Ce temps est-il le même, quelle que soit, sur la surface de la terre, la position de l'observatoire auquel se rapporte la question ?

Seconde.

1°. On donne une droite indéfinie AB et une droite PQ perpendicul. à AB, terminée aux points P et Q situés du même côté de AB ; connaissant les distances des points P et Q au

point O où PQ prolongé rencontre AB, calculer l'angle sous lequel PQ est vu d'un point donné de AB.

2°. on demande de déterminer sur la droite AB un point tel que PQ soit vu de ce point sous un angle donné; le problème, s'il est possible, a au moins 2 solutions.

3°. Il y a exception, lorsque l'angle donné est l'angle maxim. sous lequel PQ puisse être vu d'un point de AB. Il n'y a dans ce cas que deux solutions.

4°. Trouver la valeur de l'angle maximum dont on vient de parler.

5°. Donner une construction géométrique qui détermine le point de AB duquel la ligne donnée est vue sous l'angle maximum.

6°. Trouver quelle relation doit exister entre OP et OQ pour que l'angle maximum soit 30° ou $\frac{\pi}{6}$.

Troisième.

1°. Etant données quatre droites dans un plan, on propose de mener une parallèle à la première, de façon que les segments déterminés par les 3 autres sur cette parallèle soient entre eux comme deux longueurs données a et b.

2°. Expliquer comment on peut évaluer le rapport de la circonférence au diamètre, en calculant les périmètres des polygones de 4, 8, 16, 32... côtés inscrits dans un rayon du cercle de rayon donné.

---

année 1860.

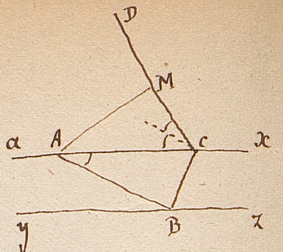
Mathématiques Spéciales.

On donne deux Ellipsoïdes A et B. On demande le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à l'Ellipsoïde A et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de B.

Logique (Lettres).

Etant données deux parallèles ax, yz, et un point A sur la première, on mène par ce point

une sécante quelconque AB ; et par le point B où elle rencontre la seconde circonférence parallèle, on élève BC perp. à AB. au point C on fait l'angle ACD double de BAC, et du point A on abaisse sur CD la perp. AM. On propose de démontrer que le lieu des points M est une circonf.

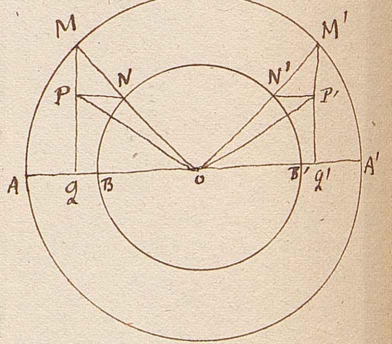


2°. Une pyramide hexagonale ~~dont la~~ régulière dont la hauteur est de 90 centimètres a un volume de 1mc. Quel est le côté de l'hexagone qui lui sert de base ?

Logique Scientifique.

1°. La surface d'un triangle ABC est égale à un carré donné. Le côté AB est égal à une ligne donnée C ; la différence (A-B) des angles adjacents est égale à un angle positif donné $\mathcal{L}$ moindre que 180°. On propose de calculer les angles A et B. Le problème est-il toujours possible, et admet-il plusieurs solutions ?

2°. Soient AMA' et BNB' deux circonférences concentriques, et AA' un diamètre fixe ; soient OM et OM' deux droites rectangulaires menées par le centre O, dont l'une coupe les deux circonférences en M et N, et l'autre en M' et N'. On abaisse sur AA' les perpendiculaires MQ et M'Q' ; des points N et N' on abaisse sur MQ et M'Q' les perpendiculaires NP, N'P'. Enfin l'on joint OP et OP' et l'on forme ainsi l'angle POP'. Comment doivent être tracées les deux droites rectangulaires OM, OM' pour que l'angle POP' soit le plus grand possible ?



Rhétorique Scientifique.

1°. Exposer les lois du mouvement des planètes. Dire comment l'observation a pu y conduire Képler, et quelles conséquences on en a tirées.

2°. Mener une tangente à une ellipse, parallèlement à une droite donnée.

Seconde Scientifique.

1°. On donne la suite des termes

$$1-\frac{m^2}{2^2}+\frac{m^2(m^2-2^2)}{2^2.4^2}-\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{2^2.4^2.6^2}+\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \cdots$$

dont la loi est évidente. On demande de calculer sous la forme la plus simple qu'on pourra la somme des deux premiers termes, la somme des 3 premiers, celle des 4 premiers, et en général celle des n premiers, n étant quelconque. Trouver que si m désigne un nombre entier pair, on pourra toujours choisir n de telle sorte que la somme soit nulle.

2°. Volume d'un tronc de pyramide à bases parallèles. – Déterminer la différence entre le volume d'un tronc de pyramide et celui d'un prisme de même hauteur qui a pour base la section faite à égale distance des deux bases et parallèlement à ces deux bases. – La différence que l'on vient de déterminer étant représentée par un prisme de même hauteur que le tronc et dont la base est semblable à celle du tronc, déterminer l'un des côtés de cette base, lorsqu'on connaît les deux côtés qui lui sont homologues dans les deux bases du tronc.

Troisième Scientifique.

1°. Extraire la racine carrée d'un nombre quelconque, à moins d'une certaine unité décimale, et dire combien il faut prendre de chiffres à la racine pour avoir une certaine approximation. (?? n'est-ce pas : dans le nombre, pour avoir à la racine).

2°. Construire un quadrilatère connaissant les quatre côtés et l'angle formé par les prolongements de deux côtés opposés.

Année 1861.

Mathématiques Spéciales.

Un ellipsoïde étant donné, trouver le lieu géométrique des centres des sections planes dont les aires ont une même valeur donnée.

Logique Littéraire.

1°. Expliquer l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier, en prenant pour exemple 75683.

540

2°. Trouver dans le plan d'un triangle un point tel que la somme des carrés des distances de ce point aux trois sommets soit la plus petite possible.

id. id. Physique.

Une sphère de platine ayant 0m,03 de diamètre est suspendue au-dessous d'un des plateaux d'une balance très-exacte, et plonge complètement dans le mercure. Au-dessous de l'autre plateau de la balance est suspendu un cylindre de cuivre droit à base circulaire, ayant aussi 0m,03 de diam. Ce cylindre plonge complètement dans l'eau. — On demande quelle doit être sa hauteur pour que l'équilibre ait lieu. [Dens. $HO = 1$, $Hg = 13,59$, $Cu = 8,8$, $P_t = 22$]

Logique Scientifique.

1°. Étant donnés deux points fixes A et B, on trace une droite OP faisant avec AB un angle qcq. φ, et une droite OP' perp. à OP. On prend sur OP et sur OP' deux points M et M' tels que $MA+MB = M'A+M'B = 2a$. Puis on achève le rectangle OMM'N. On demande à quelle valeur de l'angle φ répondent le max. et le min. de l'aire du rectangle.

2°. Démontrer que, dans un parallélipipède circonscrit à une sphère, chacune des 3 arêtes est proportionnelle au sinus de l'angle des deux autres.

id. id. Physique.

Deux tubes cylindriques verticaux, de même section, peuvent être mis en communication par un conduit à robinet qui débouche à la partie inférieure de l'un et de l'autre. L'un de ces tubes est fermé à la partie supérieure; il a un mètre de long et renferme une couche d'air de 0m,50 d'épaisseur soumise à la pression atmosphérique, et une couche de mercure de même épaisseur. Le robinet est d'abord fermé, et le conduit plein de mercure. On ouvre le robinet, une partie du mercure passe dans le second tube, qui est ouvert dans l'air à sa partie supérieure.

Bientôt l'équilibre s'établit. On demande quelle est alors la différence de niveau dans les deux tubes ; les fonds de ces tubes sont dans un même plan horizontal ; la pression extérieure est $0^{m},76$.

Rhétorique (Sciences).

(*) Composition recommencée comme infaisable. Voir plus loin.

(*) 1°. Une planète traversant aujourd'hui l'horizon d'un certain lieu en même temps qu'une certaine étoile, est-il possible que le même phénomène se reproduise dans les quatre ans à la même date de l'année ? Quelles sont les conditions que doivent remplir, pour qu'il en soit ainsi, le plan de l'orbite de la planète, la latitude du lieu où se fait l'observation, et la distance de la planète au soleil.
La coïncidence des passages des deux astres à l'horizon aurait-elle lieu seulement aux époques mentionnées dans l'énoncé ? Connaît-on une planète pour laquelle les conditions trouvées nécessaires dans la réponse à la question précédente soient effectivement remplies ?

2°. Résoudre l'équation

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

Seconde Scientifique.

1°. Deux circonférences égales se coupent en deux points A et B. Par le point A on mène une sécante APQ qui coupe les deux circonférences aux points P et Q. On propose d'évaluer la surface BPQ comprise entre les deux arcs BP, BQ et la droite PQ. — On prouvera que cette surface est proportionnelle au carré de PQ.

2°. Réduire à la forme la plus simple la fraction

$$\frac{ab(x^2+y^2) + xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2) + xy(a^2-b^2)}$$

Troisième Scientifique.

1°. Construire un triangle égal à un triangle donné, et dont les 3 sommets soient situés respectivement sur 3 droites données.

2°. Les côtés d'un triangle sont $a = 32^{m}$ $b = 28^{m}$ $c = 22^{m}$. Calculer à un millimètre près les distances des 3 sommets au point de rencontre des 3 droites qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés.

ECOLE NORMALE SUPERIEURE